

ZUR THEORIE DER LINEAREN INTEGRODIFFERENTIALGLEICHUNGEN

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
BEI DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER
GROSSHERZOGLICH HESSISCHEN LUDWIGS-
UNIVERSITÄT ZU GIESSEN. EINGEREICHT

VON

ARTUR SASSMANNSHAUSEN

GEBOREN IN WORMS

Genehmigt durch das Prüfungskollegium am 1. Februar
Referent: Dr. Schlemmer

Inhalt.

| | Seite |
|-------|-------|
| | 1 |

Erster Abschnitt.

Über die Minoren der Fredholmschen Determinante.

| | |
|---|----|
| Entwicklung der Fredholmschen Determinante und ihrer Minoren nach Parameter (Nr. 1—5) | 6 |
| Entwicklungsregel für die Fredholmsche Determinante | 6 |
| Entwicklungsregel für einen Minor 1. Ordnung | 8 |
| Entwicklungsregel für einen Minor 2. Ordnung | 10 |
| Entwicklung eines Minors p ter Ordnung als Determinante aus Minoren $p-1$ ter Ordnung | 11 |
| Entwicklungsregel für einen Minor p ter Ordnung. | 14 |
| Entwicklung eines komponierten Kernes (Nr. 6). | 17 |

Zweiter Abschnitt.

Über eine neue Art von Integrodifferentialgleichungen.

| | |
|---|----|
| Differentialgleichung für die Fredholmsche Determinante und die Integrodifferentialgleichungen für ihre Minoren (Nr. 1—5) | 22 |
| Differentialgleichung für die Fredholmsche Determinante. | 22 |
| Integrodifferentialgleichung für einen Fredholmschen Minor 1. Ordnung | 23 |
| System von Integrodifferentialgleichungen für die Minoren 1. und 2. Ordnung | 24 |
| System von Integrodifferentialgleichungen für die Minoren 1. bis p ter Ordnung. | 26 |
| Erklärung der Begriffe Funktionenstrecke und Funktionenfeld. Die aufgestellten Feldgleichungen entsprechenden Streckengleichungen | 28 |
| Herleitung der aufgestellten Integrodifferentialgleichungen (Nr. 6) | 29 |
| allgemeine Lösung (Nr. 7—9) | 31 |
| Herleitung der allgemeinen Lösung | 31 |
| Herleitung gewisser partikulärer Lösungen in Determinantenform. Anwendung der allgemeinen Lösung. | 35 |
| Herleitung der allgemeinen Lösung für die Streckengleichung | 37 |

| | | |
|-----|---|--|
| | isolierten singulären Punkt (Nr. 10—13) | |
| 10. | Rekursionsformeln für die Reihenkoeffizienten des allgemeinen für $z = z_0$ verschwindenden Lösungssystems | |
| 11. | Analytische Fortsetzung der Reihen | |
| 12. | Verhalten der Lösungen beim Umlauf um einen isolierten sin- Punkt. | |
| 13. | Entsprechende Entwicklungen für die Streckengleichung . . | |
| V. | Besondere Fälle (Nr. 14 u. 15) | |
| 14. | Der Fall konstanter Koeffizienten | |
| 15. | Der Fall $b_1(z i, \kappa) = b_2(z i, \kappa) = b(z i, \kappa)$ | |

Einleitung.

man für ein System von n linearen Differentialgleichungen die Differentialgleichungen aufstellt, denen die Minoren einer Integralmatrix — d. h. einer Matrix von n von unabhängigen Lösungssystemen — genügen, so gelangt man zu einem System von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, das $\binom{n}{p}$ Gleichungen enthält, da es $\binom{n}{p}^2$ Minoren p ter Ordnung einer n -reihigen Determinante gibt.

Man kann nun durch Anwendung des Fredholmschen Grenzüberganges ein System von n linearen Differentialgleichungen die lineare Integralgleichung

$$\frac{dy(z|i, \kappa)}{dz} = a(z|i, \kappa) + \int_0^1 y(z|i, \lambda) a(z|\lambda, \kappa) d\lambda,$$

aus der Feldgleichung, gewinnen kann¹⁾, wobei die Integralkurve das Lösungsfeld dieser Gleichung entspricht, so liegt die Frage, unter welchen Integrodifferentialgleichungen die Fredholmschen Integralgleichungen des Lösungsfeldes genügen. Diese Frage soll in der folgenden Abschnitten behandelt werden.

Im ersten Abschnitt werden im ersten Abschnitt Regeln für die Differentiation der Fredholmschen Determinante und ihrer Minoren nach den Parametern abgeleitet, die der Differentiationsregel für eine Determinante genau entsprechen. Dann wird noch eine Beziehung zwischen den Minoren einer Fredholmschen Determinante 2. Ordnung eines komponierten Systems und den Minoren seiner Komponenten hergestellt, die ebenfalls über endliche Determinanten entspricht.

Im zweiten Abschnitt werden zunächst mit Hilfe der Ergebnisse des ersten Abschnittes die Differentialgleichung für die Fredholm-Determinante und die Integrodifferentialgleichung für die Minor der 1. Ordnung eines Lösungsfeldes der Gleichung (A) bzw. für dessen inverses Feld aufgestellt.¹⁾ Sodann wird das System von Integrodifferentialgleichungen aufgestellt, dem die Minoren 1. und p ter Ordnung des erwähnten Lösungsfeldes genügen, und das die Gestalt hat:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} U(z|i, \kappa) = b(z|i, \kappa) + \int_0^1 U(z|i, \lambda) b(z|\lambda, \kappa) d\lambda \\ \frac{d}{dz} V\left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ \vdots \\ i_p, \kappa_p \end{array} \right. \right) = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} | \begin{array}{c} U(z|i_\alpha, \kappa_\beta) \\ \alpha=1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta=1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p \end{array} | b(z|i_r, \kappa_s) \\ \quad + \int_0^1 \sum_{s=1}^p V\left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ \vdots \\ i_s, \lambda \\ \vdots \\ i_p, \kappa_p \end{array} \right. \right) b(z|\lambda, \kappa_s) d\lambda. \end{array} \right.$$

Wie man sieht, tritt hier als Analogon zur Erhöhung der Anzahl der Gleichungen in dem linearen Differentialsystem ein neuer Typus von Integrodifferentialgleichungen auf. Die Form der zweiten Gleichung des erhaltenen Systems legt es nahe, es in der Weise zu verallgemeinern, daß man statt des einen Koeffizienten deren p verschiedene $b_1(z|i, \kappa)$ bis $b_p(z|i, \kappa)$ einführt. Man erhält so das System:

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} U_l(z|i, \kappa) = b_l(z|i, \kappa) + \int_0^1 U_l(z|i, \lambda) b_l(z|\lambda, \kappa) d\lambda \quad (l=1, \dots, p) \\ \frac{d}{dz} V\left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ \vdots \\ i_p, \kappa_p \end{array} \right. \right) = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} | \begin{array}{c} U_\beta(z|i_\alpha, \kappa_\beta) \\ \alpha=1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta=1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p \end{array} | b_s(z|i_r, \kappa_s) \\ \quad + \int_0^1 \sum_{s=1}^p V\left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ \vdots \\ i_s, \lambda \\ \vdots \\ i_p, \kappa_p \end{array} \right. \right) b_s(z|\lambda, \kappa_s) d\lambda. \end{array} \right.$$

Da die Behandlung dieses Systems recht umständlich wird, beschränken wir uns auf den Fall $p=2$. Es wird dann gezeigt, daß das allgemeine Lösungssystem dieses Systems folgende Gestalt hat²⁾

1) Vgl. Schlesinger a. a. O. S. 96, Formel (F) und S. 112.

$$u_1(\varepsilon | i, \kappa) = U_1(\varepsilon | i, \kappa) + c_1(i, \kappa) + \int_0^1 c_1(i, \lambda) U_1(\varepsilon | \lambda, \kappa) d\lambda$$

$$u_2(\varepsilon | i, \kappa) = U_2(\varepsilon | i, \kappa) + c_2(i, \kappa) + \int_0^1 c_2(i, \lambda) U_2(\varepsilon | \lambda, \kappa) d\lambda$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}\left(\varepsilon \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) &= V\left(\varepsilon \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) + C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) + c_1(i_1, \kappa_1) U_2(\varepsilon | i_2, \kappa_2) \\ &\quad - c_2(i_1, \kappa_2) U_1(\varepsilon | i_2, \kappa_1) - c_1(i_2, \kappa_1) U_2(\varepsilon | i_1, \kappa_2) \\ &\quad + c_2(i_2, \kappa_2) U_1(\varepsilon | i_1, \kappa_1) + \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) U_1(\varepsilon | \lambda, \kappa_1) \right. \\ &\quad + C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) U_2(\varepsilon | \lambda, \kappa_2) + c_1(i_1, \lambda) U_1(\varepsilon | \lambda, \kappa_1) U_2(\varepsilon | i_2, \kappa_2) \\ &\quad - c_2(i_1, \lambda) U_1(\varepsilon | i_2, \kappa_1) U_2(\varepsilon | \lambda, \kappa_2) \\ &\quad - c_1(i_2, \lambda) U_1(\varepsilon | \lambda, \kappa_1) U_2(\varepsilon | i_1, \kappa_2) \\ &\quad \left. + c_2(i_2, \lambda) U_1(\varepsilon | i_1, \kappa_1) U_2(\varepsilon | \lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) U_1(\varepsilon | \lambda, \kappa_1) U_2(\varepsilon | \mu, \kappa_2) d\lambda d\mu, \end{aligned}$$

wo $U_1(\varepsilon | i, \kappa)$, $U_2(\varepsilon | i, \kappa)$, $V\left(\varepsilon \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ ein partikuläres Lösungssystem bedeutet, und außer dem Nichtverschwinden der Fredholmschen Determinanten von $U_1(\varepsilon | i, \kappa)$ und $U_2(\varepsilon | i, \kappa)$ noch das Nichtverschwinden der Fredholmschen Determinante von $(-U_1(\varepsilon | i_1, \kappa_1) U_2(\varepsilon | i_2, \kappa_2))$ vorausgesetzt werden muß. $V\left(\varepsilon \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ dagegen braucht keiner Bedingung unterworfen zu werden. $c_1(i, \kappa)$, $c_2(i, \kappa)$, $C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right)$ sollen willkürlich und von ε unabhängig sein. Eine andere Form des allgemeinen Lösungssystems ist:

$$u_1(\varepsilon | i, \kappa) = U_1(\varepsilon | i, \kappa) + c_1(i, \kappa) + \int_0^1 c_1(i, \lambda) U_1(\varepsilon | \lambda, \kappa) d\lambda$$

$$u_2(\varepsilon | i, \kappa) = U_2(\varepsilon | i, \kappa) + c_2(i, \kappa) + \int_0^1 c_2(i, \lambda) U_2(\varepsilon | \lambda, \kappa) d\lambda$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}\left(\varepsilon \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) &= \left| \begin{smallmatrix} u_1(\varepsilon | i_1, \kappa_1) & u_2(\varepsilon | i_1, \kappa_2) \\ u_1(\varepsilon | i_2, \kappa_1) & u_2(\varepsilon | i_2, \kappa_2) \end{smallmatrix} \right| + \mathfrak{C}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ \mathfrak{C}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) U_1(\varepsilon | \lambda, \kappa_1) + \mathfrak{C}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) U_2(\varepsilon | \lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{C}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) U_1(\varepsilon | \lambda, \kappa_1) U_2(\varepsilon | \mu, \kappa_2) d\lambda d\mu, \end{aligned}$$

wo U_1, U_2 ; c_1, c_2 dieselbe Bedeutung haben wie vorher willkürlich und von z unabhängig ist.

Setzt man voraus, daß für $b_1(z|i, \kappa)$ und $b_2(z|i, \kappa)$ gelten:

$$b_1(z|i, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(i, \kappa)(z - z_0)^n$$

$$b_2(z|i, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(i, \kappa)(z - z_0)^n,$$

die für $|z - z_0| \leq R$ konvergent sind, so ergibt sich $z = z_0$ holomorphes Lösungssystem in der Form

$$U_1(z|i, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(i, \kappa)(z - z_0)^n$$

$$U_2(z|i, \kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(i, \kappa)(z - z_0)^n$$

$$V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right)(z - z_0)^n$$

das für $|z - z_0| < R$ konvergiert, und für dessen lineare Rekursionsformeln erhält¹⁾, in denen die Anfangsbedingungen

$\Phi_0(i, \kappa), \chi_0\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right)$ ganz willkürlich bleiben. Ist insbesondere

$$\varphi_0(i, \kappa) = 0, \Phi_0(i, \kappa) = 0, \chi_0\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

so erhalten wir diese Rekursionsformeln in einer einfachen analytischen Fortsetzung dieses Lösungssystems und das Lösungssystem beim Umlauf um einen isolierten Punkt der Koeffizienten werden dann ganz entsprechend bei $z = z_0$ für die Gleichung (A) in der erwähnten Abhandlung von Volterra durchgeführt ist.²⁾

In dem Falle, wo die Koeffizienten von z unabhängig sind, erhält sich das allgemeine Lösungssystem gemäß den vorhergehenden Formeln durch die beiden Volterraschen Transzendenten

1) Wegen der Formeln für φ_n und Φ_n vgl. Schlesinger, *Math. Ann.* 61, Formel (3).

2) S. 101 ff.

$$W(z - z_0 | b_1(i, \kappa)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_1^{(n)}(i, \kappa) (z - z_0)^n$$

$$W(z - z_0 | b_2(i, \kappa)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_2^{(n)}(i, \kappa) (z - z_0)^n$$

wo $b_1^{(n)}(i, \kappa)$ und $b_2^{(n)}(i, \kappa)$ die sogenannten iterierten
ind.
Fall

$$b_1(z | i, \kappa) = b_2(z | i, \kappa) = b(z | i, \kappa)$$

das System zurück, dem die Minoren 2. Ordnung eines
ldes von (A) genügen.

u entsprechende Entwicklungen werden für die Gleichung

$$\left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) = \int_0^1 \left\{ Q \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) b_1(z | \lambda, \kappa_1) + Q \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right) b_2(z | \lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda$$

hrt, die sich zu der dritten Gleichung des Systems (C) für
hält, wie die Streckengleichung

$$\frac{dx(z | \kappa)}{dz} = \int_0^1 x(z | \lambda) a(z | \lambda, \kappa) d\lambda$$

ldgleichung (A).

Auszug aus der folgenden Arbeit ist im Jahresbericht der
Mathematiker-Vereinigung **25** (1916) erschienen.

l. etwa Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, S. 514.

Über die Minoren der Fredholmschen Determinante.

I. Differentiation der Fredholmschen Determinante und ihrer Minoren nach einem Parameter.

1. Ein in bezug auf die reellen Veränderlichen i und κ stetiger Kern $y(i, \kappa)$ möge noch von anderen Veränderlichen z abhängen, und zwar werde dies wegen vorausgesetzt, daß $y(z|i, \kappa)$ eine monogene Funktion der komplexen Veränderlichen z sei. Man nennt dann¹⁾ $y(z|i, \kappa)$ ein monogenes Funktionenfeld der Veränderlichen z, i und κ heißt ein Funktionenfeldzeiger. Die Fredholmsche Determinante D_y ist ebenfalls eine Funktion von z , und zwar, wie sich aus ihrer Darstellung²⁾

$$(1) \quad D_y(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} y(z|i_1, i_1) & \cdots & y(z|i_1, i_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(z|i_p, i_1) & \cdots & y(z|i_p, i_p) \end{vmatrix} di_1 \cdots di_p$$

sofort ergibt, ebenfalls eine monogene Funktion der komplexen Veränderlichen z . Wir fragen nach der Ableitung dieser Funktion nach z .

Um diese Ableitung zu erhalten, dürfen wir die Reihe (1) gliedweise differenzieren, denn die Glieder dieser Reihe besitzen alle Ableitungen, und die durch gliedweise Differentiation erhaltene Reihe konvergiert gleichmäßig.

Die gliedweise Differentiation der Reihe (1) ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d D_y(z)}{dz} &= \int_0^1 y'(z|i, i) di \\ &+ \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \begin{vmatrix} y'(z|i_1, i_1) & y(z|i_1, i_2) \\ y'(z|i_2, i_1) & y(z|i_2, i_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y(z|i_1, i_1) & y'(z|i_1, i_2) \\ y(z|i_2, i_1) & y'(z|i_2, i_2) \end{vmatrix} \right\} di_1 di_2 \\ &+ \frac{1}{3!} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \begin{vmatrix} y'(z|i_1, i_1) & y(z|i_1, i_2) & y(z|i_1, i_3) \\ y'(z|i_2, i_1) & y(z|i_2, i_2) & y(z|i_2, i_3) \\ y'(z|i_3, i_1) & y(z|i_3, i_2) & y(z|i_3, i_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y(z|i_1, i_1) & y'(z|i_1, i_2) & y(z|i_1, i_3) \\ y(z|i_2, i_1) & y'(z|i_2, i_2) & y(z|i_2, i_3) \\ y(z|i_3, i_1) & y(z|i_3, i_2) & y'(z|i_3, i_3) \end{vmatrix} \right. \\ &\left. + \begin{vmatrix} y(z|i_1, i_1) & y(z|i_1, i_2) & y'(z|i_1, i_3) \\ y(z|i_2, i_1) & y(z|i_2, i_2) & y'(z|i_2, i_3) \\ y'(z|i_3, i_1) & y(z|i_3, i_2) & y(z|i_3, i_3) \end{vmatrix} \right\} di_1 di_2 di_3 + \cdots \text{ in inf.,} \end{aligned}$$

1) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 87.

2) Vgl. etwa Kowalewski, a. a. O., S. 462.

Striche Ableitungen nach z bedeuten. Die einzelnen Determinanten werden nun nach den Spalten entwickelt, in denen die Ableitungen von y stehen. In den y' , die nur von einer Integrationsveränderlichen abhängen, wird dieselbe mit i bezeichnet. In allen übrigen Ableitungen wir die erste Integrationsveränderliche mit i , die zweite mit κ und formen die mit ihnen multiplizierten Subdeterminanten durch Spaltenvertauschungen so um, daß in ihnen links oben an der Stelle das Element $y(z|\kappa, i)$ steht. Die übrigen Integrationsveränderlichen werden in geeigneter Weise mit i_1, i_2 usw. bezeichnet. Es erhält so:

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 y'(z|i, i) di \\ &- \frac{1}{2!} \left\{ 2 \int_0^1 \int_0^1 y'(z|i, i) y(z|i_1, i_1) di di_1 - 2 \int_0^1 \int_0^1 y'(z|i, \kappa) y(z|\kappa, i) di d\kappa \right\} \\ &- \frac{1}{3!} \left\{ 3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y'(z|i, i) \begin{vmatrix} y(z|i_1, i_1) & y(z|i_1, i_2) \\ y(z|i_2, i_1) & y(z|i_2, i_2) \end{vmatrix} di di_1 di_2 \right. \\ &\quad \left. - 6 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y'(z|i, \kappa) \begin{vmatrix} y(z|\kappa, i) & y(z|\kappa, i_1) \\ y(z|i_1, i) & y(z|i_1, i_1) \end{vmatrix} di d\kappa di_1 \right\} \\ &- \dots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

werden diejenigen Summanden, die $y'(z|i, i)$ und die, welche $y(z|\kappa, i)$ enthalten, zu je einer besonderen Reihe zusammengefaßt.

In der ersten Reihe wird $\int_0^1 y'(z|i, i) di$ herausgezogen, und aus der zweiten Reihe $\int_0^1 \int_0^1 y'(z|i, \kappa) di d\kappa$, was wegen der gemachten Voraussetzungen erlaubt ist.

$$\begin{aligned} &\frac{dD_y(z)}{dz} \\ &= 1! \int_0^1 y(z|i, i) di + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} y(z|i_1, i_1) & y(z|i_1, i_2) \\ y(z|i_2, i_1) & y(z|i_2, i_2) \end{vmatrix} di_1 di_2 \\ &\quad + \dots \text{ in inf.} \left\{ \int_0^1 y'(z|i, i) di \right. \end{aligned}$$

Nach Formel (1) ist die erste Reihe die Determinante $D_y(z)$ selbst. Ferner ist¹⁾:

$$(2) \quad -D_y\left(z \left| \begin{smallmatrix} i \\ x \end{smallmatrix} \right.\right) = y(z|x, i) + \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{y(z|x, i) y(z|x, i_1)}{y(z|i_1, i) y(z|i_1, i_1)} \left| di_1 + \dots \text{ in inf.} \right.$$

wo $D_y\left(z \left| \begin{smallmatrix} i \\ x \end{smallmatrix} \right.\right)$ das Symbol für einen Fredholmschen Minor 1. Ordnung ist. Setzt man also für die Reihen die Werte (1) und (2) ein, so erhält man folgende Differentiationsregel für eine Fredholmsche Determinante:

$$(3) \quad \frac{dD_y(z)}{dz} = D_y(z) \int_0^1 y'(z|i, i) di + \int_0^1 \int_0^1 y'(z|i, x) D_y\left(z \left| \begin{smallmatrix} i \\ x \end{smallmatrix} \right.\right) di dx.$$

Wie man sieht, ist diese Formel der Differentiationsregel für eine Determinante n ter Ordnung:

$$\frac{d}{dz} |y_{ix}(z)| = \sum_{i=1}^n \sum_{x=1}^n y'_{ix}(z) Y_{ix},$$

in der Y_{ix} die zu y_{ix} gehörige Subdeterminante bedeutet, ganz analog.

2. Es soll nun die Differentiationsregel für einen Fredholmschen Minor 1. Ordnung hergeleitet werden.

Wir differenzieren zu diesem Zwecke die Reihe (2) gliedweise, was aus denselben Gründen gestattet ist wie bei der Reihe (1).

Wir erhalten im p ten Gliede unter dem $(p-1)$ fachen Integral wieder eine Summe von p Determinanten, die jedesmal in einer Spalte Ableitungen von y enthalten. Die einzelnen Determinanten werden nach diesen Spalten entwickelt. Die Bezeichnungen der Integrationsveränderlichen werden zum Teil in geeigneter Weise geändert, und diejenigen mit den y' multiplizierten Subdeterminanten, welche dieselben Elemente enthalten, durch Zeilen- oder Spaltenvertauschungen auf dieselbe Form gebracht. Dann werden jedesmal diejenigen Glieder zusammengefaßt, die einen der Ausdrücke

$$y'(z|x, i), \int_0^1 y'(z|\lambda, i) d\lambda, \int_0^1 y'(z|x, \lambda) d\lambda, \\ \int_0^1 y'(z|\lambda, \lambda) d\lambda \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 y'(z|\lambda, \mu) d\lambda d\mu$$

enthalten, und diese Ausdrücke selbst in max eine Kl

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{d\mathbf{z}} D_y \left(\frac{y(\mathbf{z}|\mathbf{x})}{y(\mathbf{z}|\mathbf{x})} \right) \\
& 1 + \frac{1}{1!} \int_0^1 y(\mathbf{z}|i_1, i_1) di_1 + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{y(\mathbf{z}|i_1, i_1) y(\mathbf{z}|i_1, i_2)}{y(\mathbf{z}|i_2, i_1) y(\mathbf{z}|i_2, i_2)} \right| di_1 di_2 \\
& \quad + \dots \text{in inf.} \Big\} \\
& d\lambda \left\{ y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \lambda) + \frac{1}{1!} \int_0^1 \left| \frac{y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \lambda) y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i_1)}{y(\mathbf{z}|i_1, \lambda) y(\mathbf{z}|i_1, i_1)} \right| di_1 \right. \\
& \quad + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \lambda) y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i_1) y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i_2)}{y(\mathbf{z}|i_1, \lambda) y(\mathbf{z}|i_1, i_1) y(\mathbf{z}|i_1, i_2)} \right| di_1 di_2 \\
& \quad \left. + \dots \text{in inf.} \right\} \\
& d\lambda \left\{ y(\mathbf{z}|\lambda, i) + \frac{1}{1!} \int_0^1 \left| \frac{y(\mathbf{z}|\lambda, i) y(\mathbf{z}|\lambda, i_1)}{y(\mathbf{z}|i_1, i) y(\mathbf{z}|i_1, i_1)} \right| di_1 \right. \\
& \quad + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{y(\mathbf{z}|\lambda, i) y(\mathbf{z}|\lambda, i_1) y(\mathbf{z}|\lambda, i_2)}{y(\mathbf{z}|i_1, i) y(\mathbf{z}|i_1, i_1) y(\mathbf{z}|i_1, i_2)} \right| di_1 di_2 \\
& \quad \left. + \dots \text{in inf.} \right\} \\
& \frac{1}{1!} \int_0^1 \left| \frac{y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i) y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i_1)}{y(\mathbf{z}|i_1, i) y(\mathbf{z}|i_1, i_1)} \right| di_1 \\
& + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i) y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i_1) y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i_2)}{y(\mathbf{z}|i_1, i) y(\mathbf{z}|i_1, i_1) y(\mathbf{z}|i_1, i_2)} \right| di_1 di_2 \\
& + \dots \text{in inf.} \Big\} \int_0^1 y'(\mathbf{z}|\lambda, \lambda) d\lambda \\
& \mu d\lambda d\mu \left\{ \left| \frac{y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i) y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \lambda)}{y(\mathbf{z}|\mu, i) y(\mathbf{z}|\mu, \lambda)} \right| + \frac{1}{1!} \int_0^1 \left| \frac{y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i) y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, \lambda) y(\mathbf{z}|\mathbf{x}, i_1)}{y(\mathbf{z}|\mu, i) y(\mathbf{z}|\mu, \lambda) y(\mathbf{z}|\mu, i_1)} \right| di_1 \right. \\
& \quad \left. + \dots \text{in inf.} \right\}.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man hier die Formeln (1) und (2), sowie da

$$(4) \quad D_y \left(z \begin{vmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} y(z|\kappa_1, i_1) & y(z|\kappa_1, i_2) \\ y(z|\kappa_2, i_1) & y(z|\kappa_2, i_2) \end{vmatrix} \\ + \frac{1}{1!} \int_0^1 \begin{vmatrix} y(z|\kappa_1, i_1) & y(z|\kappa_1, i_2) & y(z|\kappa_1, \lambda_1) \\ y(z|\kappa_2, i_1) & y(z|\kappa_2, i_2) & y(z|\kappa_2, \lambda_1) \\ y(z|\lambda_1, i_1) & y(z|\lambda_1, i_2) & y(z|\lambda_1, \lambda_1) \end{vmatrix} d\lambda_1 + \dots$$

wo $D_y \left(z \begin{vmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{vmatrix} \right)$ das Symbol für einen Fredholmschen Minor
nung von $y(z|i, \kappa)$ ist, so erhält man

$$(5) \quad \frac{d}{dz} D_y \left(z \begin{vmatrix} i \\ \kappa \end{vmatrix} \right) = -y'(z|\kappa, i) D_y(z) \\ - \int_0^1 \left\{ y'(z|\lambda, i) D_y \left(z \begin{vmatrix} \lambda \\ \kappa \end{vmatrix} \right) + y'(z|\kappa, \lambda) D_y \left(z \begin{vmatrix} i \\ \lambda \end{vmatrix} \right) \right\} d\lambda \\ + D_y \left(z \begin{vmatrix} i \\ \kappa \end{vmatrix} \right) \int_0^1 y'(z|\lambda, \lambda) d\lambda + \int_0^1 \int_0^1 y'(z|\lambda, \mu) D_y \left(z \begin{vmatrix} i \\ \kappa \end{vmatrix} \right) d\lambda d\mu$$

3. Wir wollen nun nach derselben Methode noch die Ableitungen eines Fredholmschen Minors 2. Ordnung berechnen.

Wir verfahren zu diesem Zwecke mit der Reihe (4) ganz entsprechend wie mit der Reihe (2) in Nr. 2. Wir differenzieren die Reihe (2) gliedweise und entwickeln die entstehenden Determinanten nach den Spalten, in denen die Ableitungen von y stehen. Wir werden, nach geeigneter Änderung der Benennungen der Integrationsveränderlichen, diejenigen mit y' multiplizierten Subdeterminanten, welche die gleichen Elemente enthalten, durch Zeilen- oder Spaltenvertauschungen auf dieselbe Form gebracht. Ferner werden die Resultate in die einen der Ausdrücke:

$$y'(z|\kappa_1, i_1), y'(z|\kappa_2, i_1), y'(z|\kappa_1, i_2), y'(z|\kappa_2, i_2); \\ \int_0^1 y'(z|\lambda, i_1) d\lambda, \int_0^1 y'(z|\lambda, i_2) d\lambda, \int_0^1 y'(z|\kappa_1, \lambda) d\lambda, \int_0^1 y'(z|\kappa_2, \lambda) d\lambda, \\ \int_0^1 y'(z|\lambda, \lambda) d\lambda \text{ und } \int_0^1 \int_0^1 y'(z|\lambda, \mu) d\lambda d\mu$$

enthalten, zu je einer besonderen Reihe zusammengefaßt, und die Ausdrücke selbst jedesmal vor eine Klammer gesetzt.

berücksichtigt man dann die Formeln (2) und (4), sowie die Darstellung eines Fredholmschen Minors 3. Ordnung¹):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} i_1, i_2, i_3 \\ \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} y(z|\kappa_1, i_1) & y(z|\kappa_1, i_2) & y(z|\kappa_1, i_3) \\ y(z|\kappa_2, i_1) & y(z|\kappa_2, i_2) & y(z|\kappa_2, i_3) \\ y(z|\kappa_3, i_1) & y(z|\kappa_3, i_2) & y(z|\kappa_3, i_3) \end{vmatrix} \\
 &+ \frac{1}{1!} \int_0^1 \begin{vmatrix} y(z|\kappa_1, i_1) & y(z|\kappa_1, i_2) & y(z|\kappa_1, i_3) & y(z|\kappa_1, \lambda_1) \\ y(z|\kappa_2, i_1) & y(z|\kappa_2, i_2) & y(z|\kappa_2, i_3) & y(z|\kappa_2, \lambda_1) \\ y(z|\kappa_3, i_1) & y(z|\kappa_3, i_2) & y(z|\kappa_3, i_3) & y(z|\kappa_3, \lambda_1) \\ y(z|\lambda_1, i_1) & y(z|\lambda_1, i_2) & y(z|\lambda_1, i_3) & y(z|\lambda_1, \lambda_1) \end{vmatrix} d\lambda_1 \\
 &+ \dots \text{in inf.,}
 \end{aligned}$$

hält man:

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\
 &y'(z|\kappa_1, i_1) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + y'(z|\kappa_2, i_1) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) + y'(z|\kappa_1, i_2) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\
 &\quad - y'(z|\kappa_2, i_2) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) \\
 &y'(z|\lambda, i_1) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + y'(z|\lambda, i_2) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + y'(z|\kappa_1, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \lambda, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\
 &\quad + y'(z|\kappa_2, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \lambda \end{smallmatrix} \right. \right) \} d\lambda \\
 &\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \int_0^1 y'(z|\lambda, \lambda) d\lambda + \int_0^1 \int_0^1 y'(z|\lambda, \mu) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2, \lambda \\ \kappa_1, \kappa_2, \mu \end{smallmatrix} \right. \right) d\lambda d\mu,
 \end{aligned}$$

wie man sofort aus den Reihendarstellungen sieht:

$$D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2, i_1 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) = - D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right)$$

benso

$$D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_2, \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) = - D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right).$$

Es würde keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten bereiten, die in vorangegangenen Nummern angewandte Methode zur Herleitung der Differentiationsformeln für Fredholmsche Minoren beliebiger Ordnung anzuwenden. Indessen wird das Verfahren bei Minoren höherer Ordnung sehr umständlich. Daher soll im folgenden ein Satz hergeleitet werden, der es ermöglicht die Differentiationsregel für einen beliebigen Ordnung in einfacherer Weise abzuleiten.

Er lautet¹⁾:

$$(7) \quad D_y^{p-1}(z) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ x_1, x_2 \dots x_p \end{smallmatrix} \right. \right) = \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ x_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right|_{\alpha, \beta = 1, 2 \dots p}.$$

Wir beweisen diese Formel zunächst für $p = 2$.

Zwischen den Fredholmschen Minoren erster und zweiter Ordnung besteht die Beziehung²⁾:

$$(8) \quad D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ x_1, x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + \int_0^1 y(z|x_1, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \lambda, x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) d\lambda = -y(z|x_1, i_1) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + y(z|x_1, i_2) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right. \right).$$

Diese Gleichung kann als lineare Integralgleichung für $D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ x_1, x_2 \end{smallmatrix} \right. \right)$ als Funktion von x_1 aufgefaßt werden. i_1, i_2 und x_2 spielen die Rolle von Parametern. Der Kern der Integralgleichung ist $y(z|x_1, \lambda)$. Die Fredholmsche Lösung von (8) ergibt:

$$D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ x_1, x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) = -y(z|x_1, i_1) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + y(z|x_1, i_2) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + \int_0^1 \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ x_1 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} \left[-y(z|\lambda, i_1) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + y(z|\lambda, i_2) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \right] d\lambda.$$

Wir multiplizieren hier mit $D_y(z)$ und verwenden dann die Formel (7) für $p = 2$.

$$(9) \quad y(z|x, i) D_y(z) + \int_0^1 y(z|\lambda, i) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ x \end{smallmatrix} \right. \right) d\lambda = -D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i \\ x \end{smallmatrix} \right. \right) D_y(z).$$

So folgt:

$$D_y(z) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ x_1, x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) = \left| \begin{array}{cc} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ x_1 \end{smallmatrix} \right. \right) & D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\ D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ x_1 \end{smallmatrix} \right. \right) & D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \end{array} \right|.$$

Für beliebiges p beweisen wir die Formel (7) durch einen Induktionsbeweis.

1) Dieser Satz stammt von Plemelj, Monatshefte f. Math. u. Phys. 1908, S. 101, Formel (10). P. benützt die Formel zur Definition der Minoren einer Matrix. — Vgl. auch Hahn, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 20 (1910), S. 101, Formel (27).

2) Vgl. etwa Kowalewski, a. a. O., S. 486, Formel (4) für $p = 2$.

3) Vgl. etwa Kowalewski, a. a. O., S. 474, Formel (15).

es sei also vorausgesetzt, daß

$$D_y^{p-2}(\mathcal{Z}) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{p-1} \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{p-1} \end{smallmatrix} \right. \right) = \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right|.$$

$\alpha, \beta = 1, 2 \dots p-1$

besteht zwischen den Fredholmschen Minoren $(p-1)$ ter und $(p-2)$ ter Ordnung die Beziehung¹⁾:

$$\begin{aligned} D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) &+ \int_0^1 y(\mathcal{Z} | \kappa_1, \lambda) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2, \dots i_p \\ \lambda, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) d\lambda \\ &= - y(\mathcal{Z} | \kappa_1, i_1) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_2, i_3 \dots i_p \\ \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &+ y(\mathcal{Z} | \kappa_1, i_2) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_3 \dots i_p \\ \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &- + \dots + (-1)^p y(\mathcal{Z} | \kappa_1, i_p) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{p-1} \\ \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right). \end{aligned}$$

Gleichung fassen wir als lineare Integralgleichung für

$$D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)$$

als Funktion von κ_1 auf mit dem Kerne $y(\mathcal{Z} | \kappa_1, \lambda)$. Die Veränderlichen $i_1, i_2, \dots, i_p; \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p$ sind als Parameter zu betrachten. Die Fredholmsche Auflösung dieser Gleichung gibt:

$$\begin{aligned} &D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &= y(\mathcal{Z} | \kappa_1, i_1) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_2, i_3 \dots i_p \\ \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) + y(\mathcal{Z} | \kappa_1, i_2) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_3 \dots i_p \\ \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &\dots + (-1)^p y(\mathcal{Z} | \kappa_1, i_p) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{p-1} \\ \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &+ \frac{1}{D_y(\mathcal{Z})} \left[- y(\mathcal{Z} | \lambda, i_1) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_2, i_3 \dots i_p \\ \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) + y(\mathcal{Z} | \lambda, i_2) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_3 \dots i_p \\ \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \right. \\ &\left. - + \dots + (-1)^p y(\mathcal{Z} | \lambda, i_p) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{p-1} \\ \kappa_2, \kappa_3 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Multipliziert man hier mit $D_y^{p-1}(\mathcal{Z})$ und setzt man für die Minoren $(p-1)$ ter Ordnung ihre Werte aus Formel (10) und für die mit ihnen multiplizierten Ausdrücke ihre Werte aus Formel 9 ein, so erhält

$$\begin{aligned}
& D_y^{p-1}(z) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \dots & \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\
&= D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_{\beta'} \end{smallmatrix} \right. \right) \right| - D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\gamma \\ \kappa_\delta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \\
&\quad \alpha, \beta' = 2, 3 \dots p \qquad \qquad \qquad \gamma = 1, 3 \dots p \\
&\qquad \qquad \qquad \delta = 2, 3 \dots p \\
&+ \dots + (-1)^{p-1} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_p \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\lambda \\ \kappa_\mu \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \\
&\qquad \qquad \qquad \lambda = 1, 2 \dots p-1 \\
&\qquad \qquad \qquad \mu = 2, 3 \dots p
\end{aligned}$$

Hier ist aber die rechte Seite nichts anderes als die Entwicklung der Determinante

$$\left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_{\beta} \end{smallmatrix} \right. \right) \right|$$

$\alpha, \beta = 1, 2 \dots p$

nach der ersten Spalte. Wir erhalten also die Formel (7). Wenn diese Formel für die Minoren $(p-1)$ ter Ordnung gilt, so gilt sie also auch für die Minoren p ter Ordnung. Nun ist sie bewiesen für $p=2$, sie gilt also allgemein.

5. Wir differenzieren Formel (7) nach z . Die dabei rechts auftretenden Determinanten denken wir uns nach den Reihen entwickelt, in denen die Ableitungen der Minoren stehen und erhalten so:

$$\begin{aligned}
& (p-1) D_y^{p-2}(z) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \dots & \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \frac{d D_y(z)}{dz} \\
&+ D_y^{p-1}(z) \frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \dots & \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\
&= \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \cdot \\
&\qquad \qquad \qquad \alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\
&\qquad \qquad \qquad \beta = 1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p
\end{aligned}$$

Hier werden für die Ableitungen der Minoren 1. Ordnung die Ausdrücke aus Formel (5) eingesetzt und berücksichtigt, daß nach Formel (7)

$$D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_r & \lambda \\ \kappa_s & \mu \end{smallmatrix} \right. \right) = \frac{1}{D_y(z)} \left\{ D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right) - D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \right\}.$$

$$y^{p-2}(\mathcal{Z}) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \frac{d D_y(\mathcal{Z})}{d \mathcal{Z}} \\ + D_y^{p-1}(\mathcal{Z}) \frac{d}{d \mathcal{Z}} D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)$$

$$+ s - 1 y'(\mathcal{Z} | \kappa_s, i_r) D_y(\mathcal{Z}) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right|$$

$$, i_r) \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right|$$

$$- \sum_{s=1}^p y'(\mathcal{Z} | \kappa_s, \lambda) \sum_{r=1}^p (-1)^{r+s} D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \Big\} d\lambda$$

$$- \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right|$$

$$| \lambda, \mu) \left\{ D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right) \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \right. \\ \left. - \sum_{r=1}^p D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right) \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \right\}.$$

$$\alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p; \beta = 1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p$$

undung der Formel (7) erhält man für einige der hier auf-
nahmen folgendes:

$$D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| = D_y^{p-1}(\mathcal{Z}) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots \lambda \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_r \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ \alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta = 1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p$$

$$D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| = D_y^{p-1}(\mathcal{Z}) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \lambda \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ \alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta = 1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p$$

$$D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| = D_y^{p-1}(\mathcal{Z}) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right), \\ \alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta = 1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p$$

$$+ s D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| = p D_y^{p-1}(\mathcal{Z}) D_y \left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right). \\ \alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta = 2 \dots -1, s+1 \dots p$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^p D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right) \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_s \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \\
& \qquad \qquad \qquad \alpha=1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\
& \qquad \qquad \qquad \beta=1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p \\
& = \sum_{r=1}^p D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i \\ \kappa \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \\
& \qquad \qquad \qquad i=i_1, i_2 \dots \lambda \dots i_p \\
& \qquad \qquad \qquad \kappa=\kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_r \dots \kappa_p \\
& = - \sum_{r=1}^p (-1)^{p+r+1} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_r \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i \\ \kappa \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \\
& \qquad \qquad \qquad i=i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p, \lambda \\
& \qquad \qquad \qquad \kappa=\kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{r-1}, \kappa_{r+1} \dots \kappa_{p-1}, \kappa_p \\
& = - \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i \\ \kappa \end{smallmatrix} \right. \right) \right| + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right) \left| D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\gamma \\ \kappa_\delta \end{smallmatrix} \right. \right) \right| \\
& \qquad \qquad \qquad i=i_1, i_2 \dots i_p, \lambda \qquad \qquad \gamma=1, 2 \dots p \\
& \qquad \qquad \qquad \kappa=\kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p, \mu \qquad \qquad \delta=1, 2 \dots p \\
& = - D_y^p(z) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p, \lambda \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p, \mu \end{smallmatrix} \right. \right) + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right) D_y^{p-1}(z) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \end{smallmatrix} \right. \right)
\end{aligned}$$

Diese Werte setzen wir in Gleichung (*) ein und ebenso den von $\frac{d D_y(z)}{dz}$ aus Formel (3). Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}
(12) \quad & \frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\
& = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s-1} y'(z | \kappa_s, i_r) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{s-1}, \kappa_{s+1} \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\
& - \int_0^1 \left\{ \sum_{r=1}^p y'(z | \lambda, i_r) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots \lambda \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_r \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{s=1}^p y'(z | \kappa_s, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \lambda \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \right\} \\
& + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \int_0^1 y'(z | \lambda, \lambda) d\lambda \\
& + \int_0^1 \int_0^1 y'(z | \lambda, \mu) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p, \lambda \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p, \mu \end{smallmatrix} \right. \right) d\lambda d\mu.
\end{aligned}$$

II. Die Minoren eines komponierten Kernes.

Besteht zwischen den Feldern $\eta(i, \kappa)$, $y(i, \kappa)$ und $c(i, \kappa)$ die

$$\eta(\kappa, i) = y(\kappa, i) + c(\kappa, i) + \int_0^1 y(\kappa, \lambda) c(\lambda, i) d\lambda,$$

ent man $\eta(\kappa, i)$ aus $y(\kappa, i)$ und $c(\kappa, i)$ komponiert und schreibt

$$\{\eta(\kappa, i)\} = \{y(\kappa, i)\} \{c(\kappa, i)\}.$$

$$\{\eta(\kappa, i)\}^{-1} = \{c(\kappa, i)\}^{-1} \{y(\kappa, i)\}^{-1},$$

das inverse Feld oder der lösende Kern zu $\{\eta(\kappa, i)\}$,

$$\{\eta(\kappa, i)\}^{-1} = \left\{ \frac{D_\eta(i)}{D_\eta(\kappa)} \right\}$$

und ebenso

$$\{c(\kappa, i)\}^{-1} = \left\{ \frac{D_c(i)}{D_c(\kappa)} \right\}$$

$$\{y(\kappa, i)\}^{-1} = \left\{ \frac{D_y(i)}{D_y(\kappa)} \right\}.$$

wir diese Ausdrücke in Gleichung (14) ein, so erhalten wir

$$\left\{ \frac{D_\eta(i)}{D_\eta(\kappa)} \right\} = \left\{ \frac{D_c(i)}{D_c(\kappa)} \right\} \left\{ \frac{D_y(i)}{D_y(\kappa)} \right\}$$

ausführlich geschrieben

$$\frac{D_\eta(i)}{D_\eta(\kappa)} = \frac{D_c(i)}{D_c(\kappa)} + \frac{D_y(i)}{D_y(\kappa)} + \int_0^1 \frac{D_c(i)}{D_c(\lambda)} \cdot \frac{D_y(\lambda)}{D_y(\kappa)} d\lambda.$$

ermittelt dieser Gleichung und der Formel (7) kann man nun
Schwierigkeit eine Darstellung der Fredholmschen Minoren eines
ierten Feldes durch die Fredholmschen Minoren seiner Kompo-
geben. Da die Rechnung aber in dem allgemeinen Falle eines
beliebiger p ter Ordnung recht umständlich wird, so soll das
ren hier nur für den Fall $p = 2$ durchgeführt werden.

as Formel (7) ergibt sich

$$\frac{D_\eta(i_1, i_2)}{D_\eta(x_1, x_2)} = \frac{D_\eta(i_1)}{D_\eta(x_1)} \frac{D_\eta(i_2)}{D_\eta(x_2)} - \frac{D_\eta(i_1)}{D_\eta(x_2)} \frac{D_\eta(i_2)}{D_\eta(x_1)}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{D_y(i_1, i_2)}{D_y} = & \left[\frac{D_y(i_1)}{D_y} + \frac{D_c(i_1)}{D_c} + \int_0^1 \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} d\lambda \right] \\
& \cdot \left[\frac{D_y(i_2)}{D_y} + \frac{D_c(i_2)}{D_c} + \int_0^1 \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} d\lambda \right] \\
& - \left[\frac{D_y(i_1)}{D_y} + \frac{D_c(i_1)}{D_c} + \int_0^1 \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} d\lambda \right] \\
& \cdot \left[\frac{D_y(i_2)}{D_y} + \frac{D_c(i_2)}{D_c} + \int_0^1 \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} d\lambda \right]
\end{aligned}$$

oder anders geordnet

$$\begin{aligned}
(*) \quad \frac{D_y(i_1, i_2)}{D_y} = & \left[\frac{D_y(i_1)}{D_y} \frac{D_y(i_2)}{D_y} - \frac{D_y(i_1)}{D_y} \frac{D_y(i_2)}{D_y} \right] \\
& + \left[\frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_c(i_2)}{D_c} - \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_c(i_2)}{D_c} \right] + \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(i_2)}{D_y} \\
& - \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y} - \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(i_2)}{D_y} + \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y} \\
& + \int_0^1 \left\{ \left[\frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_c(i_2)}{D_c} - \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_c(i_2)}{D_c} \right] \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \right. \\
& + \left[\frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_c(i_2)}{D_c} - \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_c(i_2)}{D_c} \right] \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \\
& + \frac{D_c(i_1)}{D_c} \left[\frac{D_y(\lambda)}{D_y} \frac{D_y(i_2)}{D_y} - \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \frac{D_y(i_2)}{D_y} \right] \\
& + \frac{D_c(i_2)}{D_c} \left[\frac{D_y(i_1)}{D_y} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} - \frac{D_y(i_1)}{D_y} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \right] \left. \right\} d\lambda \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \frac{D_y(\mu)}{D_y} \left[\frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_c(i_2)}{D_c} - \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_c(i_2)}{D_c} \right] d\lambda d\mu
\end{aligned}$$

() und erhalten so:

$$\begin{aligned}
 \frac{D_y(i_1, i_2)}{D_y(x_1, x_2)} &= \frac{D_y(i_1, i_2)}{D_y} + \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} + \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(i_2)}{D_y} - \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(i_2)}{D_y} \\
 &\quad - \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y} + \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y} \\
 &+ \int_0^1 \left\{ \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} + \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} + \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(\lambda, i_2)}{D_y} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1, \lambda)}{D_y} \right\} d\lambda \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \frac{D_y(\mu)}{D_y} d\lambda d\mu.
 \end{aligned}$$

lassen sich die p -reihigen Determinanten einer komponierten Matrix und homogen aus Determinanten einer jeden ihrer Komponenten zusammensetzen.¹⁾ Um auch hier zu erreichen, daß die Minoren der einzelnen Komponente linear und überdies die Minoren der beiden Komponenten gleichberechtigt in dem Ausdruck für den Minor komponierten Feldes auftreten, formen wir das auf der rechten Seite der Gleichung (16) auftretende Doppelintegral etwas um.

ist nämlich

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \int_0^1 \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \frac{D_y(\mu)}{D_y} d\lambda d\mu \\
 &\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \frac{D_y(\mu)}{D_y} + \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\mu)}{D_y} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \right] d\lambda d\mu,
 \end{aligned}$$

die beiden Summanden unter dem Doppelintegral ja nur durch die Richtung der Integrationsveränderlichen unterscheiden. Nun ist

$$D_c(i_1, i_2) = -D_c(i_1, i_2),$$

¹⁾Vgl. z. B. Kowalewski, a. a. O., S. 72, Satz 26.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \frac{D_y(\mu)}{D_y} d\lambda d\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda, \mu)}{D_y} d\lambda d\mu$$

nach Formel (7).

In (16) eingesetzt gibt

$$(16a) \quad \frac{D_{\eta}(i_1, i_2)}{D_{\eta}} = -\frac{D_y(i_1, i_2)}{D_y} + \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} + \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(i_2)}{D_y}$$

$$- \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(i_2)}{D_y} - \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y}$$

$$+ \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y}$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} + \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \right.$$

$$+ \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(\lambda, i_2)}{D_y} + \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1, \lambda)}{D_y}$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda, \mu)}{D_y} d\lambda d\mu \right\}$$

In dieser Gestalt läßt sich die Formel auch durch den Fredholm Grenzübergang aus dem oben erwähnten Determinantensatz direkt ableiten.

Eine weitere Form der Darstellung, die zwar etwas weniger sichtlich ist, aber für spätere Untersuchungen (Zweiter Abschnitt) von Nutzen sein wird, erhält man, wenn man in der Gleichung die Ausdrücke in der dritten und vierten eckigen Klammer unter dem ersten Integral anders ordnet und die übrigen eckigen Klammern mittels Formel (7) umformt. Es ergibt sich so

$$\begin{aligned}
b) \quad & -\frac{D_y(x_1, x_2)}{D_y} = \frac{D_y(x_1, x_2)}{D_y} + \frac{D_c(x_1, x_2)}{D_c} + \frac{D_c(x_1)}{D_c} \cdot \frac{D_y(x_2)}{D_y} \\
& - \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(i_2)}{D_y} - \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y} \\
& + \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y} \\
& + \int_0^1 \left\{ \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} + \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \right. \\
& + \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \left[\frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(i_2)}{D_y} - \frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y} \right] \\
& + \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \left[\frac{D_c(i_2)}{D_c} \frac{D_y(i_1)}{D_y} - \frac{D_c(i_1)}{D_c} \frac{D_y(i_2)}{D_y} \right] \left. \right\} d\lambda \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \frac{D_c(i_1, i_2)}{D_c} \frac{D_y(\lambda)}{D_y} \frac{D_y(\mu)}{D_y} d\lambda d\mu.
\end{aligned}$$

Zweiter Abschnitt.

Über eine neue Art von Integrodifferentialgleichungen.

I. Die Differentialgleichung für die Fredholmsche Determinante und die Integrodifferentialgleichungen für ihre Minoren.

1. Es sei $y(z|i, \kappa)$ ein Lösungsfeld der Feldgleichung

$$(17) \quad \frac{dy(z|i, \kappa)}{dz} = a(z|i, \kappa) + \int_0^1 y(z|i, \lambda) a(z|\lambda, \kappa) d\lambda.$$

Wir differenzieren die zu $y(z|i, \kappa)$ gehörige Fredholmsche Determinante $D_y(z)$ nach Formel (3) und berücksichtigen dabei, daß $y(z|i, \kappa)$ eine Lösung der Integrodifferentialgleichung (17) sein soll

$$\begin{aligned} \frac{dD_y(z)}{dz} &= D_y(z) \int_0^1 a(z|i, i) di \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 a(z|\lambda, i) \left\{ D_y(z) y(z|i, \lambda) + D_y\left(z \begin{vmatrix} \lambda \\ i \end{vmatrix}\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 y(z|\kappa, \lambda) D_y\left(z \begin{vmatrix} \kappa \\ i \end{vmatrix}\right) dx \right\} di d\lambda. \end{aligned}$$

Nun verschwindet aber der Ausdruck in der geschweiften Klammer nach Formel (9). Wir erhalten also

$$(18) \quad \frac{dD_y(z)}{dz} = D_y(z) \int_0^1 a(z|i, i) di$$

und durch Auflösung die weitere Gleichung¹⁾

$$(19) \quad D_y(z) = e^{\int_0^z a_2 \int_0^1 a(z|i, i) di dz}.$$

Diese Formel ist einem von Jacobi²⁾ in der Theorie der linearen Differentialsysteme aufgestellten Satze analog.

2. Wir differenzieren jetzt den Minor $D_y(z \mid \kappa)$ des Lösungsfeldes $y(z \mid i, \kappa)$ der Integrodifferentialgleichung (17) nach Formel (5) und erhalten bei geeigneter Zusammenfassung

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} D_y(z \mid \kappa) \\ = & -a(z \mid \kappa, i) D_y(z) - \int_0^1 a(z \mid \kappa, \lambda) D_y(z \mid \lambda) + D_y(z \mid \kappa) \int_0^1 a(z \mid \lambda, \lambda) d\lambda \\ & - \int_0^1 a(z \mid \lambda, i) d\lambda \left\{ y(z \mid \kappa, \lambda) D_y(z) + D_y(z \mid \lambda) + \int_0^1 y(z \mid \mu, \lambda) D_y(z \mid \mu) d\mu \right\} \\ & - \int_0^1 \int_0^1 a(z \mid \lambda, \mu) d\lambda d\mu \left\{ D_y(z \mid \lambda, i) + y(z \mid \kappa, \lambda) D_y(z \mid i) \right. \\ & \quad \left. - y(z \mid \mu, \lambda) D_y(z \mid \kappa) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 y(z \mid \nu, \lambda) D_y(z \mid \nu, i) d\nu \right\}, \end{aligned}$$

wobei davon Gebrauch gemacht ist, daß

$$D_y(z \mid \lambda, i) = -D_y(z \mid i, \lambda).$$

Nun verschwindet der Ausdruck in der ersten Klammer nach Formel (9), und der Ausdruck in der zweiten Klammer nach Formel (8), wenn man dort überall $y(z \mid i, \kappa)$ durch $y(z \mid \kappa, i)$ ersetzt. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} (20) \quad \frac{d}{dz} D_y(z \mid \kappa) = & -a(z \mid \kappa, i) D_y(z) \\ & - \int_0^1 D_y(z \mid \lambda) a(z \mid \kappa, \lambda) d\lambda + D_y(z \mid \kappa) \int_0^1 a(z \mid \lambda, \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Um noch eine Vereinfachung zu erzielen, bilden wir

$$\frac{d}{dz} \frac{D_y(z \mid \kappa)}{D_y(z)} = \frac{1}{D_y(z)} \frac{d}{dz} D_y(z \mid \kappa) - \frac{D_y(z \mid \kappa)}{D_y^2(z)} \frac{d D_y(z)}{dz}.$$

Setzen wir rechts für die Differentialquotienten die Werte aus (18) und (20) ein, so ergibt sich

$$(21) \quad \frac{d}{dz} \frac{D_y(z \mid \kappa)}{D_y(z)} = -a(z \mid \kappa, i) - \int_0^1 \frac{D_y(z \mid \lambda)}{D_y(z)} a(z \mid \kappa, \lambda) d\lambda.$$

Der Ausdruck $\frac{D_y(z|i, \kappa)}{D_y(z)}$ genügt also der Integrodifferentialgle

$$(22) \quad \frac{d}{dz} U(z|i, \kappa) = b(z|i, \kappa) + \int_0^1 U(z|i, \lambda) b(z|\lambda, \kappa) d\lambda,$$

in der

$$b(z|i, \kappa) = -a(z|\kappa, i)$$

ist, und welche die zu (17) adjungierte Gleichung heißt.¹⁾

3. Um nunmehr die Integrodifferentialgleichung für die
schen Minoren 2. Ordnung zu erhalten, wird der Minor D_{ν}
nach Formel (6) differenziert unter der Voraussetzung, daß
ein Lösungsfeld von (17) ist. Nach zweckmäßiger Zusammenfassung
erhält man so

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\ = & -a(z|\kappa_1, i_1) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + a(z|\kappa_2, i_1) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) + a(z|\kappa_1, i_2) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\ & - a(z|\kappa_2, i_2) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) \\ & - \int_0^1 \left\{ a(z|\kappa_1, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \lambda, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + a(z|\kappa_2, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \lambda \end{smallmatrix} \right. \right) \right\} d\lambda + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\ & - \int_0^1 a(z|\lambda, i_1) \left\{ D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + y(z|\kappa_1, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) - y(z|\kappa_2, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 y(z|\mu, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \mu, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \right. \\ & + \int_0^1 a(z|\lambda, i_2) \left\{ D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda, i_1 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + y(z|\kappa_1, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) - y(z|\kappa_2, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 y(z|\mu, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \mu, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \right. \\ & + \int_0^1 \int_0^1 a(z|\lambda, \mu) \left\{ D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda, i_1, i_2 \\ \mu, \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + y(z|\mu, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) - y(z|\kappa_1, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \mu, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \right. \\ & \quad \left. + y(z|\kappa_2, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \mu, \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) + \int_0^1 y(z|\nu, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \mu, \kappa_1, \nu \end{smallmatrix} \right. \right) \right\} d\mu d\lambda \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in den Klammern verschwinden mit Ausnahme des ersten, wie man aus Formel (11) für $p=2$ und $p=3$ erkennt, wenn man dort überall an Stelle von $y(z|i, \kappa)$ sich $y(z|\kappa, i)$ gesetzt denkt. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\
 &= -D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) a(z|\kappa_2, i_2) + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) a(z|\kappa_1, i_2) + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right) a(z|\kappa_2, i_1) \\
 &\quad - D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) a(z|\kappa_1, i_1) - \int_0^1 \left\{ D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \lambda, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) a(z|\kappa_1, \lambda) \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \lambda \end{smallmatrix} \right. \right) a(z|\kappa_2, \lambda) \right\} d\lambda \\
 &\quad + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \int_0^1 a(z|\lambda, \lambda) d\lambda.
 \end{aligned}$$

Wir bilden zum Zwecke der Vereinfachung dieser Gleichung

$$\frac{d}{dz} \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} = \frac{1}{D_y(z)} \frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) - \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y^2(z)} \frac{d}{dz} D_y(z).$$

Setzt man hier die Werte der Differentialquotienten aus (18) und (23) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 (24) \quad & \frac{d}{dz} \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} \\
 &= -\frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} a(z|\kappa_2, i_2) + \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} a(z|\kappa_1, i_2) + \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_1 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} a(z|\kappa_2, i_1) \\
 &\quad - \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_2 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} a(z|\kappa_1, i_1) \\
 &\quad - \int_0^1 \left\{ \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \lambda, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} a(z|\kappa_1, \lambda) + \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \lambda \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} a(z|\kappa_2, \lambda) \right\} d\lambda.
 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $\frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i \\ \kappa \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y}$ und $\frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y}$ genügen also folgendem System von Integrodifferentialgleichungen

$$(25) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dz} U(z|i, \kappa) = b(z|i, \kappa) + \int_0^1 U(z|i, \lambda) b(z|\lambda, \kappa) d\lambda \\ & \frac{d}{dz} V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) = U(z|i_1, \kappa_1) b(z|i_2, \kappa_2) - U(z|i_1, \kappa_2) b(z|i_2, \kappa_1) \\ & \quad - U(z|i_2, \kappa_1) b(z|i_1, \kappa_2) + U(z|i_2, \kappa_2) b(z|i_1, \kappa_1) \\ & \quad + \int_0^1 \left\{ V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) b(z|\lambda, \kappa_1) + V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix} \right.\right) b(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda, \end{aligned} \right.$$

wo wieder

$$b(z|i, \kappa) = -a(z|\kappa, i)$$

ist.

4. Es ist jetzt leicht, das in der vorhergehenden Nummer gewonnene Ergebnis zu verallgemeinern. Setzen wir nämlich wieder voraus, daß $y(z|i, \kappa)$ ein Lösungsfeld der Gleichung (17) ist, so ergibt sich aus Formel (12) bei geeigneter Anordnung

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ &= \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s-1} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{s-1}, \kappa_{s+1} \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) a(z|\kappa_s, i_r) \\ & \quad - \int_0^1 \sum_{s=1}^p D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \lambda \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) a(z|\kappa_s, \lambda) d\lambda + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \int_0^1 a(z|\lambda, \lambda) d\lambda \\ & \quad + \sum_{r=1}^p (-1)^r \int_0^1 a(z|\lambda, i_r) \left\{ D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda, i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \dots \dots \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \right. \\ & \quad \quad \quad + \sum_{s=1}^p (-1)^{s-1} y(z|\kappa_s, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{s-1}, \kappa_{s+1} \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ & \quad \quad \quad \left. + \int_0^1 y(z|\mu, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \mu, i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \dots \dots \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) d\mu \right\} \\ & \quad + \int_0^1 \int_0^1 a(z|\lambda, \mu) \left\{ D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda, i_1, i_2 \dots i_p \\ \mu, \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) + y(z|\mu, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \right. \\ & \quad \quad \quad + \sum_{s=1}^p (-1)^s y(z|\kappa_s, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2, i_3 \dots \dots \dots i_p \\ \mu, \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{s-1}, \kappa_{s+1} \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ & \quad \quad \quad \left. \left. + \int_0^1 y(z|\nu, \lambda) D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} \nu, i_1, i_2 \dots i_p \\ \mu, \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) d\nu \right\} d\lambda \end{aligned}$$

Nun folgt wieder aus Formel (11), daß die beiden Klammerausdrücke verschwinden. Es ist also

$$(26) \quad \frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \\ = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s-1} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{s-1}, \kappa_{s+1} \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) a(z, \kappa_s, i_r) \\ - \int_0^1 \sum_{s=1}^p D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \lambda \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) a(z, \kappa_s, \lambda) d\lambda + D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) \int_0^1 a(z, \lambda, \lambda) d\lambda.$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichung bilden wir wieder

$$\frac{d}{dz} \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} = \frac{1}{D_y(z)} \frac{d}{dz} D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) - \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y^2(z)} \frac{d}{dz} D_y(z)$$

und erhalten, indem wir rechts für die Ableitungen die Werte (18) und (26) einsetzen

$$(27) \quad \frac{d}{dz} \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} \\ = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s-1} \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{s-1}, \kappa_{s+1} \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} a(z, \kappa_s, i_r) \\ - \int_0^1 \sum_{s=1}^p \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \lambda \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} a(z, \kappa_s, \lambda) d\lambda.$$

Berücksichtigen wir nun noch, daß nach Formel (7)

$$\frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_{r-1}, i_{r+1} \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{s-1}, \kappa_{s+1} \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} = \left| \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} \right|, \\ \alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta = 1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p$$

so ergibt sich aus (27)

$$(27a) \quad \frac{d}{dz} \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s-1} \left| \frac{D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_\alpha \\ \kappa_\beta \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_y(z)} \right| a(z, \kappa_s, i_r) \\ \alpha = 1, 2 \dots r-1, r+1 \dots p \\ \beta = 1, 2 \dots s-1, s+1 \dots p$$

$$\int_0^1 \sum_{s=1}^p D_y \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \dots i_s \dots i_p \\ \kappa_1, \kappa_2 \dots \lambda \dots \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)$$

Die Ausdrücke $\frac{D_y(z|i)}{D_y(z)}$ und $\frac{D_y(z|i_1, i_2 \dots i_p)}{D_y(z)}$ genügen
gendes System von Integrodifferentialgleichungen

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} U(z|i, \kappa) = b(z|i, \kappa) + \int_0^1 U(z|i, \lambda) b(z|\lambda, \kappa) d\lambda \\ \frac{d}{dz} V\left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ \dots \\ i_p, \kappa_p \end{array} \right. \right) = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} U(z|i_\alpha, \kappa_\beta) \\ \qquad \qquad \qquad \alpha=1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, p \\ \qquad \qquad \qquad \beta=1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, p \\ \qquad \qquad \qquad + \int_0^1 \sum_{s=1}^p V\left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ \dots \\ i_s, \lambda \\ \dots \\ i_p, \kappa_p \end{array} \right. \right) b(z|\lambda, \kappa) d\lambda \end{array} \right.$$

wo wieder

$$b(z|i, \kappa) = -a(z|\kappa, i)$$

gesetzt ist.

5. Man kann der Feldgleichung (17) die Gleichung

$$(29) \quad \frac{dx(z|\kappa)}{dz} = \int_0^1 x(z|\lambda) a(z|\lambda, \kappa) d\lambda,$$

die sogenannte Streckengleichung, an die Seite stellen¹⁾ eine in bezug auf die komplexe Veränderliche z monoton²⁾ auf die reelle Veränderliche κ , den Stellenzeiger, in $0 \leq \kappa \leq 1$ stetige Funktionenstrecke bedeutet.

Die zu der der Gleichung (17) adjungierten Gleichung zugehörige Streckengleichung

$$(30) \quad \frac{d}{dz} P(z|\kappa) = \int_0^1 P(z|\lambda) b(z|\lambda, \kappa) d\lambda$$

heißt ebenfalls zu (29) adjungiert.

Wir wollen nun die in der zweiten Gleichung der (29) auftretende Funktion $V\left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ \dots \\ i_p, \kappa_p \end{array} \right. \right)$ ebenfalls ein Funktion

wobei aber im Auge zu behalten ist, daß an Stelle des

zeigers κ die p Stellenzeiger $\kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_p$ treten. $V \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1, \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_p, \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)$ ist also nach dieser Auffassung ein Funktionenfeld mit p Paaren von Stellenzeigern.

Die Funktion $Q \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right)$ wäre danach entsprechend als eine Funktionenstrecke mit p Stellenzeigern zu bezeichnen, und der zweiten Gleichung des Systems (28) würde die Streckengleichung entsprechen

$$(31) \quad \frac{d}{dz} Q \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) = \int_0^1 \sum_{s=1}^p Q \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_{s-1} \\ \lambda \\ \kappa_{s+1} \\ \vdots \\ \kappa_p \end{smallmatrix} \right. \right) b(z|\lambda, \kappa_s) d\lambda;$$

der zweiten Gleichung des Systems (25) also insbesondere die Streckengleichung

$$(32) \quad \frac{d}{dz} Q \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) = \int_0^1 \left\{ Q \left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) b(z|\lambda, \kappa_1) + Q \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right) b(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda.$$

Es sei schließlich noch erwähnt, daß im folgenden alle vorkommenden Funktionenstrecken und -felder als stetig in bezug auf die Stellenzeiger und als monogen in bezug auf die komplexe Veränderliche z vorausgesetzt werden.

II. Verallgemeinerung der aufgestellten Integrodifferentialgleichungen.

6. Die Form der zweiten Gleichung des Systems (28) und besonders die Form der ihr assoziierten Streckengleichung (31) legt es nahe, diese Gleichungen in der Weise zu verallgemeinern, daß man in der unter dem Integralzeichen stehenden Summe in jeden Summanden ein anderes Koeffizientenfeld $b_s(z|\lambda, \kappa_s)$ einsetzt. Diesen p Koeffizientenfeldern entsprechend treten dann an die Stelle der ersten Gleichung des Systems (28) p Feldgleichungen mit je einem Paar von Stellenzeigern.

Wir setzen das verallgemeinerte System also in folgender

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dz} U_i(z|i, \kappa) = b_i(z|i, \kappa) + \int_0^1 U_i(z|i, \lambda) b_i(z|\lambda, \kappa) d\lambda \quad (i=1, 2, \dots, p) \\
(33) \quad & \left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} V \left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ \vdots \\ i_p, \kappa_p \end{array} \right. \right) &= \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p (-1)^{r+s} \left| \begin{array}{c} U_\beta(z|i_\alpha, \kappa_\beta) \\ \alpha=1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, p \\ \beta=1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, p \end{array} \right| b_s(z|i_r, \kappa_s) \\ &+ \int_0^1 \sum_{s=1}^p V \left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ \vdots \\ i_s, \lambda \\ \vdots \\ i_p, \kappa_p \end{array} \right. \right) b_s(z|\lambda, \kappa_s) d\lambda. \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Der letzten Gleichung dieses Systems entspricht die Streckengleichung

$$(34) \quad \frac{d}{dz} Q \left(z \left| \begin{array}{c} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_p \end{array} \right. \right) = \int_0^1 \sum_{s=1}^p Q \left(z \left| \begin{array}{c} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_{s-1} \\ \lambda \\ \kappa_{s+1} \\ \vdots \\ \kappa_p \end{array} \right. \right) b_s(z|\lambda, \kappa_s) d\lambda.$$

Die Behandlung des Systems (33) und der Gleichung (34) gestaltet sich im Falle eines beliebigen p recht umständlich, und wir werden uns daher im folgenden auf die Behandlung des Falles $p=2$ beschränken. Es scheint jedoch, daß sich alle in diesem speziellen Falle angewandten Methoden und Schlüsse ohne grundsätzliche Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall übertragen lassen.

Wir werden uns also im folgenden mit dem System von Feldgleichungen

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dz} U_1(z|i, \kappa) &= b_1(z|i, \kappa) + \int_0^1 U_1(z|i, \lambda) b_1(z|\lambda, \kappa) d\lambda \\ \frac{d}{dz} U_2(z|i, \kappa) &= b_2(z|i, \kappa) + \int_0^1 U_2(z|i, \lambda) b_2(z|\lambda, \kappa) d\lambda \\ \frac{d}{dz} V \left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{array} \right. \right) &= U_1(z|i_1, \kappa_1) b_2(z|i_2, \kappa_2) - U_2(z|i_1, \kappa_2) b_1(z|i_2, \kappa_1) \\ &\quad - U_1(z|i_2, \kappa_1) b_2(z|i_1, \kappa_2) \\ &\quad + U_2(z|i_2, \kappa_2) b_1(z|i_1, \kappa_1) \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ V \left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{array} \right. \right) b_1(z|\lambda, \kappa_1) + V \left(z \left| \begin{array}{c} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{array} \right. \right) b_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$(36) \quad \frac{d}{dz} Q\left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) \\
= \int_0^1 \left\{ Q\left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) b_1(z|\lambda, \kappa_1) + Q\left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right.\right) b_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda$$

beschäftigen.

III. Die allgemeine Lösung.

7. Die allgemeine Lösung der Feldgleichung (22) wird durch die Formel dargestellt¹⁾

$$(37) \quad u(z|i, \kappa) = U(z|i, \kappa) + c(i, \kappa) + \int_0^1 c(i, \lambda) U(z|\lambda, \kappa) d\lambda,$$

in der $U(z|i, \kappa)$ eine partikuläre Lösung von (22) mit nicht verschwindender Fredholmscher Determinante, und $c(i, \kappa)$ ein willkürliches Konstantenfeld bedeuten. Die allgemeinen Lösungen der beiden ersten Gleichungen des Systems (35) werden also durch entsprechende Formeln dargestellt.

Um das allgemeine Lösungssystem von (35) zu erhalten, müssen wir noch die allgemeine Lösung der letzten Gleichung dieses Systems aufstellen. Da diese Gleichung aus der Gleichung für die Minoren zweiter Ordnung eines Lösungsfeldes von (17) entstanden ist, so wird anzunehmen sein, daß die Formel für die Minoren zweiter Ordnung eines komponierten Feldes einen Ansatz für die allgemeine Lösung geben wird, und zwar zeigt es sich, daß man von der Gestalt (16b) dieser Formel auszugehen hat.

Wir erhalten somit für das allgemeine Lösungssystem von (35) folgenden Ansatz

1) Vgl. Schlesinger, a. a. O., S. 99, 100.

$$\begin{aligned}
 (38) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 U_1(z|i, \kappa) &= U_1(z|i, \kappa) + c_1(i, \kappa) + \int_0^1 c_1(i, \lambda) U_1(z|\lambda, \kappa) d\lambda \\
 U_2(z|i, \kappa) &= U_2(z|i, \kappa) + c_2(i, \kappa) + \int_0^1 c_2(i, \lambda) U_2(z|\lambda, \kappa) d\lambda \\
 \mathfrak{B}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) &= V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) + C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) + c_1(i_1, \kappa_1) U_2(z|i_1, \kappa_1) \\
 &\quad - c_2(i_1, \kappa_2) U_1(z|i_2, \kappa_1) - c_1(i_2, \kappa_1) U_2(z|i_1, \kappa_2) \\
 &\quad + c_2(i_2, \kappa_2) U_1(z|i_1, \kappa_1) \\
 &\quad + \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) + C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) U_2(z|\lambda, \kappa_2) \right. \\
 &\quad \left. + c_1(i_1, \lambda) U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|i_2, \kappa_1) \right. \\
 &\quad \left. - c_2(i_1, \lambda) U_1(z|i_2, \kappa_1) U_2(z|\lambda, \kappa_2) \right. \\
 &\quad \left. - c_1(i_2, \lambda) U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|i_1, \kappa_2) \right. \\
 &\quad \left. + c_2(i_2, \lambda) U_1(z|i_1, \kappa_1) U_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\
 &\quad + \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu,
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

wo also $U_1(z|i, \kappa)$, $U_2(z|i, \kappa)$, $V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ ein partikuläres Lösung von (35) bedeutet, und außer dem Nichtverschwinden der Fredholmschen Determinanten von $U_1(z|i, \kappa)$ und $U_2(z|i, \kappa)$, wie sich aus (35) ergibt, noch das Nichtverschwinden der Fredholmschen Determinante von $(-U_1(z|i_1, \kappa_1) U_2(z|i_2, \kappa_2))$ vorausgesetzt werden muß. $V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ gegen braucht keiner Bedingung unterworfen zu werden. $c_1(i, \kappa)$, $c_2(i, \kappa)$, $C\left(\begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right)$ sollen willkürliche Konstantenfelder bedeuten.

Da wir bereits wissen, daß $U_1(z|i, \kappa)$ und $U_2(z|i, \kappa)$ bzw. gemeinsamen Lösungen der beiden ersten Gleichungen von (35) haben wir uns nur noch mit der letzten Gleichung dieses Systems beschäftigen. Wir beweisen zunächst, daß diese Gleichung durch das System (38) befriedigt wird.

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) &= \mathfrak{U}_1(z|i_1, \kappa_1) b_2(z|i_2, \kappa_2) - \mathfrak{U}_2(z|i_1, \kappa_2) b_1(z|i_2, \kappa_1) \\ &- \mathfrak{U}_1(z|i_2, \kappa_1) b_2(z|i_1, \kappa_2) + \mathfrak{U}_2(z|i_2, \kappa_2) b_1(z|i_1, \kappa_1) \\ &+ \int_0^1 \left\{ \mathfrak{B}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) b_1(z|\lambda, \kappa_1) + \mathfrak{B}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix} \right.\right) b_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

ist der erwähnte Beweis erbracht.

Wir weisen jetzt nach, daß jede mit $\mathfrak{U}_1(z|i, \kappa)$ und $\mathfrak{U}_2(z|i, \kappa)$ zusammen ein Lösungssystem von (35) bildende Lösung $\mathfrak{B}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ der Gleichung von (35) sich in der Form darstellen läßt, die durch die letzte Gleichung von (38) gegeben wird.

Es seien $U_1(z|i, \kappa)$, $U_2(z|i, \kappa)$, $V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ und $\mathfrak{U}_1(z|i, \kappa)$, $\mathfrak{U}_2(z|i, \kappa)$, $\mathfrak{V}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ zwei Lösungssysteme von (35), und $c_1(i, \kappa)$, $c_2(i, \kappa)$ die die beiden ersten Gleichungen von (38) definierten Konstanten.

Wir denken uns $C\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ durch die dritte Gleichung von (38) als Funktion von z definiert. Diese Gleichung ist eine Integralgleichung $C\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ und ist, wie wir später sehen werden, nach der unbekannten Funktion auflösbar, wenn vorausgesetzt wird, daß sowohl die Determinanten von $U_1(z|i, \kappa)$ und $U_2(z|i, \kappa)$ als auch die Determinante $(U_1(z|i_1, \kappa_1) U_2(z|i_2, \kappa_2))$ von Null verschieden sind. In diesem Fall zeigt die Fredholmsche Form der Lösung, daß $C\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ nach z differenzierbar ist.

Wir differenzieren nun die letzte Gleichung von (38) und berücksichtigen links die Gleichungen (38), rechts die Gleichungen (35). Es ergibt sich nach einfacher Reduktion

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz} C\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) \\ &+ \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dz} C\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) + \frac{d}{dz} C\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix} \right.\right) U_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{dz} C\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix} \right.\right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu = 0. \end{aligned}$$

Es ist eine lineare homogene Integralgleichung für $\frac{d}{dz} C\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$.

Um sie auf eine Form zu bringen, in der die unbekannte Funktion noch unter einem Doppelintegral auftritt, machen wir in (39) die Substitution¹⁾

$$(40) \quad \frac{d}{dz} C \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\ = \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) + \int_0^1 \left\{ \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \frac{D_{u_1} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_1}(z)} + \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix} \right. \right) \frac{D_{u_2} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_2}(z)} \right\}$$

Wenn dann noch links

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix} \right. \right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu$$

addiert und subtrahiert wird, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) - \int_0^1 \int_0^1 \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix} \right. \right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu \\ & + \int_0^1 \left\{ \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \left[U_1(z|\lambda, \kappa_1) + \frac{D_{u_1} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_1}(z)} + \int_0^1 U_1(z|\mu, \kappa_1) \frac{D_{u_1} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \mu \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_1}(z)} d\mu \right] \right. \\ & + \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix} \right. \right) \left[U_2(z|\lambda, \kappa_2) + \frac{D_{u_2} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_2 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_2}(z)} + \int_0^1 U_2(z|\mu, \kappa_2) \frac{D_{u_2} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \mu \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_2}(z)} d\mu \right] \\ & + \int_0^1 \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix} \right. \right) \left(U_1(z|\lambda, \kappa_1) \left[U_2(z|\mu, \kappa_2) + \frac{D_{u_2} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_2 \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_2}(z)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^1 U_2(z|\nu, \kappa_2) \frac{D_{u_2} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \nu \\ \mu \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_2}(z)} d\nu \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + U_2(z|\mu, \kappa_2) \left[U_1(z|\lambda, \kappa_1) + \frac{D_{u_1} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_1}(z)} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^1 U_1(z|\nu, \kappa_1) \frac{D_{u_1} \left(z \left| \begin{smallmatrix} \nu \\ \lambda \end{smallmatrix} \right. \right)}{D_{u_1}(z)} d\nu \right] \right\} \end{aligned}$$

Nun verschwinden die Ausdrücke in den eckigen Klammern nach Formel (9). Also erhalten wir für $\varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right)$ die lineare homogene Integralgleichung

$$\varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) - \int_0^1 \int_0^1 \varphi \left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix} \right. \right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu = 0$$

1) Vgl. Sinigallia, Rendic. del R. Istit. Lomb., Ser. II Vol. 44 (1910)

setzen wir voraus, daß die Randwerte Determinanten des Systems ($-U_1(z|i_1, \kappa_1) U_2(z|i_2, \kappa_2)$) nicht identisch verschwindet, so folgt daraus

$$\varphi\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) = 0,$$

und dann aus Gleichung (40)

$$\frac{d}{dz} C\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) = 0.$$

$C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right)$ erweist sich also als Konstantenfeld.

Damit ist bewiesen, daß das System (38) das allgemeine Lösungssystem von (35) ist.

8. Sind $U_1(z|i, \kappa)$ und $U_2(z|i, \kappa)$ bzw. Lösungen der beiden ersten Gleichungen von (35), so ist

$$(41) \quad U_1(z|i, \kappa), U_2(z|i, \kappa), \left| \begin{array}{cc} U_1(z|i_1, \kappa_1) & U_2(z|i_1, \kappa_2) \\ U_1(z|i_2, \kappa_1) & U_2(z|i_2, \kappa_2) \end{array} \right|$$

ein Lösungssystem von (35).

In der Tat ist:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} [U_1(z|i_1, \kappa_1) U_2(z|i_2, \kappa_2) - U_1(z|i_2, \kappa_1) U_2(z|i_1, \kappa_2)] \\ &= U_1(z|i_1, \kappa_1) b_2(z|i_2, \kappa_2) - U_2(z|i_1, \kappa_2) b_1(z|i_2, \kappa_1) - U_1(z|i_2, \kappa_1) b_2(z|i_1, \kappa_2) \\ &+ U_2(z|i_2, \kappa_2) b_1(z|i_1, \kappa_1) + \int_0^1 \left\{ \left| \begin{array}{cc} U_1(z|i_1, \lambda) & U_2(z|i_1, \kappa_2) \\ U_1(z|i_2, \lambda) & U_2(z|i_2, \kappa_2) \end{array} \right| b_1(z|\lambda, \kappa_1) \right. \\ & \quad \left. + \left| \begin{array}{cc} U_1(z|i_1, \kappa_1) & U_2(z|i_1, \lambda) \\ U_1(z|i_2, \kappa_1) & U_2(z|i_2, \lambda) \end{array} \right| b_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Diese Tatsache können wir dazu benutzen, um dem allgemeinen Lösungssystem (38) eine etwas einfachere Gestalt zu geben. Wir gehen dazu von dem partikulären Lösungssystem (41) aus, setzen also in (38)

$$V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) = \left| \begin{array}{cc} U_1(z|i_1, \kappa_1) & U_2(z|i_1, \kappa_2) \\ U_1(z|i_2, \kappa_1) & U_2(z|i_2, \kappa_2) \end{array} \right|.$$

Ferner addieren und subtrahieren wir auf der rechten Seite der dritten Gleichung von (38) den Ausdruck

$$\begin{aligned} & c_1(i_1, \kappa_1) c_2(i_2, \kappa_2) - c_1(i_2, \kappa_1) c_2(i_1, \kappa_2) \\ &+ \int_0^1 \left\{ \left[c_1(i_1, \lambda) c_2(i_2, \kappa_2) - c_1(i_2, \lambda) c_2(i_1, \kappa_2) \right] U_1(z|\lambda, \kappa_1) \right. \\ & \quad \left. + \left[c_1(i_1, \kappa_1) c_2(i_2, \lambda) - c_1(i_2, \kappa_1) c_2(i_1, \lambda) \right] U_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left[c_1(i_1, \lambda) c_2(i_2, \mu) - c_1(i_2, \lambda) c_2(i_1, \mu) \right] U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung von (38) wird dann nach geeigneter Zusammenziehung

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{B}\left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) \\
 &= \left[U_1(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_1) + c_1(i_1, \kappa_1) + \int_0^1 c_1(i_1, \lambda) U_1(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) d\lambda \right] \\
 & \quad \cdot \left[U_2(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_2) + c_2(i_2, \kappa_2) + \int_0^1 c_2(i_2, \lambda) U_2(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_2) d\lambda \right] \\
 & - \left[U_1(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_1) + c_1(i_2, \kappa_1) + \int_0^1 c_1(i_2, \lambda) U_1(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) d\lambda \right] \\
 & \quad \cdot \left[U_2(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_2) + c_2(i_1, \kappa_2) + \int_0^1 c_2(i_1, \lambda) U_2(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_2) d\lambda \right] \\
 & + C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) - \left[c_1(i_1, \kappa_1) c_2(i_2, \kappa_2) - c_1(i_2, \kappa_1) c_2(i_1, \kappa_2) \right] \\
 & + \int_0^1 \left\{ \left[C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) - \left(c_1(i_1, \lambda) c_2(i_2, \kappa_2) - c_1(i_2, \lambda) c_2(i_1, \kappa_2) \right) \right] U_1(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) \right. \\
 & \quad \left. + \left[C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) - \left(c_1(i_1, \kappa_1) c_2(i_2, \lambda) - c_1(i_2, \kappa_1) c_2(i_1, \lambda) \right) \right] U_2(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_2) \right\} \\
 & + \int_0^1 \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) - \left[c_1(i_1, \lambda) c_2(i_2, \mu) - c_1(i_2, \lambda) c_2(i_1, \mu) \right] \right\} U_1(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) U_2(\mathcal{Z} | \mu, \kappa_2) d\lambda d\mu
 \end{aligned}$$

Oder, wenn wir die beiden ersten Gleichungen von (38) berücksichtigen und

$$(42) \quad \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) = C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) - [c_1(i_1, \kappa_1) c_2(i_2, \kappa_2) - c_1(i_2, \kappa_1) c_2(i_1, \kappa_2)]$$

setzen, wo $\mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right)$ dann auch wieder ein willkürliches Koefizientenfeld ist,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{B}\left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right. \right) &= \left| \begin{array}{l} \mathfrak{U}_1(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_1) \mathfrak{U}_2(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_2) \\ \mathfrak{U}_1(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_1) \mathfrak{U}_2(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_2) \end{array} \right| \\
 & + \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) + \int_0^1 \left\{ \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) U_1(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) + \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) U_2(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_2) \right\} \\
 & + \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) U_1(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) U_2(\mathcal{Z} | \mu, \kappa_2) d\lambda d\mu.
 \end{aligned}$$

$$u_1(z|i, \kappa) = U_1(z|i, \kappa) + c_1(i, \kappa) + \int_0^1 c_1(i, \lambda) U_1(z|\lambda, \kappa) d\lambda$$

$$u_2(z|i, \kappa) = U_2(z|i, \kappa) + c_2(i, \kappa) + \int_0^1 c_2(i, \lambda) U_2(z|\lambda, \kappa) d\lambda$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}\left(z \begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) &= \left| \begin{vmatrix} u_1(z|i_1, \kappa_1) & u_2(z|i_1, \kappa_2) \\ u_1(z|i_2, \kappa_1) & u_2(z|i_2, \kappa_2) \end{vmatrix} \right| + \mathfrak{C}\left(\begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) \\ &+ \int_0^1 \left\{ \mathfrak{C}\left(\begin{vmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) + \mathfrak{C}\left(\begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{vmatrix}\right) U_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{C}\left(\begin{vmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{vmatrix}\right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die allgemeine Lösung der zu der dritten Gleichung) assoziierten Streckengleichung (36) aufstellen. Sie hat die Form

$$\begin{aligned} Q\left(z \begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{vmatrix}\right) &= C\left(\begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{vmatrix}\right) + \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{vmatrix} \lambda \\ \kappa_2 \end{vmatrix}\right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) + C\left(\begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{vmatrix}\right) U_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{vmatrix} \lambda \\ \mu \end{vmatrix}\right) U_1(z|\lambda, \kappa_1) U_2(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu, \end{aligned}$$

$\begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{vmatrix}$ eine willkürliche Konstantenstrecke, $U_1(z|i, \kappa)$ und $U_2(z|i, \kappa)$ Lösungen der beiden ersten Gleichungen von (35) sind, die den Nummer 7 dieses Abschnitts geforderten Bedingungen genügen.

Wir beweisen zunächst, daß $Q\left(z \begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{vmatrix}\right)$ die Gleichung (36) befriedigt. In der Tat erhalten wir durch Differentiation von (44)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz} Q\left(z \begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= C\left(\begin{vmatrix} \lambda \\ \kappa_2 \end{vmatrix}\right) \left[b_1(z|\lambda, \kappa_1) + \int_0^1 U_1(z|\lambda, \mu) b_1(z|\mu, \kappa_1) d\mu \right] \\ &+ C\left(\begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{vmatrix}\right) \left[b_2(z|\lambda, \kappa_2) + \int_0^1 U_2(z|\lambda, \mu) b_2(z|\mu, \kappa_2) d\mu \right] \Big\} d\lambda \\ &+ C\left(\begin{vmatrix} \lambda \\ \mu \end{vmatrix}\right) \left\{ U_1(z|\lambda, \kappa_1) \left[b_2(z|\mu, \kappa_2) + \int_0^1 U_2(z|\mu, \nu) b_2(z|\nu, \kappa_2) d\nu \right] \right. \\ &\quad \left. + U_2(z|\mu, \kappa_2) \left[b_1(z|\lambda, \kappa_1) + \int_0^1 U_1(z|\lambda, \nu) b_1(z|\nu, \kappa_1) d\nu \right] \right\} d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

($-U_1(z|i_1, \kappa_1) U_2(z|i_2, \kappa_2)$) für $z = z_0$ verschwinden, so ist dort ihre Fredholmsche Determinante gleich 1. Das folgt sofort aus der Reihe (1) für die Fredholmsche Determinante, in der, wenn die betrachtete Funktion von den vier Stellenzeigern $i_1, \kappa_1; i_2, \kappa_2$ abhängt, an Stelle von i und κ die Paare von Veränderlichen i_1, i_2 bzw. κ_1, κ_2 einzusetzen sind. Wir können also jedes andere Lösungssystem $U_1(z|i, \kappa), U_2(z|i, \kappa), \mathfrak{B}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ durch das System (50) mittels der Gleichungen (38) darstellen. $c_1(i, \kappa), c_2(i, \kappa), C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right)$ sind dann die Anfangswerte des betreffenden Systems für $z = z_0$.

Aus (43) folgt ferner, daß eine Lösung $\mathfrak{B}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ der letzten Gleichung von (35) darstellbar ist als Determinante

$$U_1(z|i_1, \kappa_1) U_2(z|i_2, \kappa_2) - U_1(z|i_2, \kappa_1) U_2(z|i_1, \kappa_2)$$

von Lösungen der beiden ersten Gleichungen von (35), die mit ihr ein Lösungssystem bilden, wenn ihr Anfangswert $C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right)$ für $z = z_0$ in der Form

$$C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) = c_1(i_1, \kappa_1) c_2(i_2, \kappa_2) - c_1(i_2, \kappa_1) c_2(i_1, \kappa_2)$$

darstellbar ist, denn dann wird nach (42)

$$\mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

$c_1(i, \kappa)$ und $c_2(i, \kappa)$ sind dann bzw. die Anfangswerte von $U_1(z|i, \kappa)$ und $U_2(z|i, \kappa)$ für $z = z_0$.

11. Wir wollen jetzt die Reihen (50) nach einem Punkte z_1 ihres Konvergenzbereichs analytisch fortsetzen. Von den Koeffizientenfeldern $b_1(z|i, \kappa)$ und $b_2(z|i, \kappa)$ setzen wir dabei voraus, daß sie allenthalben eindeutig seien.

Wir denken uns also in den Reihen (50) die Substitution

$$z - z_0 = (z - z_1) + (z_1 - z_0)$$

gemacht. Die so erhaltenen nach Potenzen von $(z - z_1)$ fortschreitenden Reihen $\bar{U}_1(z|i, \kappa), \bar{U}_2(z|i, \kappa), \bar{V}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ werden dann sicher für

$$|z - z_1| < R - |z_1 - z_0|$$

konvergieren also nicht nur die analytischen Fortsetzungen von $U_1(z|i, \kappa)$ und $U_2(z|i, \kappa)$ ¹⁾ sondern auch die analytische Fortsetzung von $V(z|i_1, \kappa_1, i_2, \kappa_2)$ und diese Fortsetzungen bilden dort ein Lösungssystem.

Wir können also schließen, daß die aus den Reihen (50) durch gleichzeitige analytische Fortsetzung entstehenden monogenen analytischen Funktionen holomorph sind in dem ganzen Holomorphiebereich der beiden Koeffizientenfelder $b_1(z|i, \kappa)$ und $b_2(z|i, \kappa)$ und dort ein Lösungssystem von (35) bilden.

12. Es sei nun $z = p$ für wenigstens eines der Koeffizientenfelder ein isolierter singulärer Punkt, etwa ein Pol. Dann wird ein durch die Anfangswerte $\varphi_0(i, \kappa)$, $\Phi_0(i, \kappa)$, $\chi_0(i_1, \kappa_1, i_2, \kappa_2)$ für den regulären Punkt $z = z_0$ definiertes Lösungssystem $U_1(z|i, \kappa)$, $U_2(z|i, \kappa)$, $V(z|i_1, \kappa_1, i_2, \kappa_2)$ im allgemeinen in der Umgebung von $z = p$ nicht mehr eindeutig sein. Setzen wir dieses Lösungssystem also auf einem Wege fort, der den Punkt p umschließt und zu dem Punkte z_0 zurückkehrt, so wird es sich in ein anderes Lösungssystem $\bar{U}_1(z|i, \kappa)$, $\bar{U}_2(z|i, \kappa)$, $\bar{V}(z|i_1, \kappa_1, i_2, \kappa_2)$ verwandelt haben. Erfüllt das ursprüngliche Lösungssystem die in Nummer 7 angeführten Bedingungen, so wird sich das neue Lösungssystem durch das ursprüngliche vermittle der Gleichungen (38) darstellen lassen. Das System von Anfangswerten $\varphi_0(i, \kappa)$, $\Phi_0(i, \kappa)$, $\chi_0(i_1, \kappa_1, i_2, \kappa_2)$ geht also dann über in das System

$$(52) \left\{ \begin{aligned} \varphi_0(i, \kappa) &= \varphi_0(i, \kappa) + c_1(i, \kappa) + \int_0^1 c_1(i, \lambda) \varphi_0(\lambda, \kappa) d\lambda \\ \Phi_0(i, \kappa) &= \Phi_0(i, \kappa) + c_2(i, \kappa) + \int_0^1 c_2(i, \lambda) \Phi_0(\lambda, \kappa) d\lambda \\ \chi_0(i_1, \kappa_1, i_2, \kappa_2) &= \chi_0(i_1, \kappa_1, i_2, \kappa_2) + C(i_1, \kappa_1, i_2, \kappa_2) \\ &\quad - c_2(i_1, \kappa_2) \varphi_0(i_2, \kappa_1) - c_1(i_2, \kappa_1) \Phi_0(i_1, \kappa_2) \\ &\quad + c_2(i_2, \kappa_2) \varphi_0(i_1, \kappa_1) \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ C(i_1, \lambda, i_2, \kappa_2) \varphi_0(\lambda, \kappa_1) + C(i_1, \kappa_1, i_2, \lambda) \Phi_0(\lambda, \kappa_2) \right. \\ &\quad \left. + c_1(i_1, \lambda) \varphi_0(\lambda, \kappa_1) \Phi_0(i_2, \kappa_2) - c_2(i_1, \lambda) \varphi_0(i_2, \kappa_1) \Phi_0(\lambda, \kappa_2) \right. \\ &\quad \left. - c_1(i_2, \lambda) \varphi_0(\lambda, \kappa_1) \Phi_0(i_1, \kappa_2) + c_2(i_2, \lambda) \varphi_0(i_1, \kappa_1) \Phi_0(\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 C(i_1, \lambda, i_2, \mu) \varphi_0(\lambda, \kappa_1) \Phi_0(\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu. \end{aligned} \right.$$

Die Fredholmschen Determinanten von $c_1(i, \kappa)$ und $c_2(i, \kappa)$ sind von Null verschieden.¹⁾

13. Um auch eine Reihenentwicklung für die Lösung der Gleichung (36) zu erhalten, setzen wir

$$(53) \quad Q\left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n\left(\begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) (z - z_0)^n.$$

Setzen wir diese Reihe in Gleichung (44) ein und wählen $U_1(z|i, \kappa)$ und $U_2(z|i, \kappa)$ die für $z = z_0$ verschwindenden Lösungen beider ersten Gleichungen von (35), die ja allen geforderten Bedingungen genügen, so ergeben sich für die Koeffizienten ψ die

$$(54) \quad \psi_0\left(\begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) = C\left(\begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix}\right)$$

$$(55) \quad \begin{aligned} \psi_n\left(\begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) = & \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) \varphi_n(\lambda, \kappa_1) + C\left(\begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) \Phi_n(\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ & + \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) \left\{ \varphi_1(\lambda, \kappa_1) \Phi_{n-1}(\mu, \kappa_2) + \dots \right. \\ & \left. + \varphi_{n-1}(\lambda, \kappa_1) \Phi_1(\mu, \kappa_2) \right\} d\lambda d\mu, \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots$

wo die φ und Φ sich aus den beiden ersten der Formeln (44) für $|z - z_0| < R$, und die aus ihr durch analytische Fortsetzung entstehende monogene analytische Funktion ist im ganzen Konvergenzbereich der Koeffizientenfelder holomorph und eine Funktion von (36).

Ist wieder $z = p$ ein isolierter singulärer Punkt, und beschreiben wir einen Weg, der diesen Punkt umschließt und zum Punkt p zurückkehrt, so verwandeln sich $U_1(z|i, \kappa)$ und $U_2(z|i, \kappa)$ in $\bar{U}_1(z|i, \kappa)$ und $\bar{U}_2(z|i, \kappa)$, und $Q\left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right)$ folglich in

$$\begin{aligned} \bar{Q}\left(z \left| \begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) = & C\left(\begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) + \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) \bar{U}_1(z|\lambda, \kappa_1) + C\left(\begin{smallmatrix} \kappa_1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) \bar{U}_2(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ & + \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) \bar{U}_1(z|\lambda, \kappa_1) \bar{U}_2(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Wollen wir $\bar{Q}\left(z\left|\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right.\right)$ durch $U_1(z|i, z)$ und $U_2(z|i, z)$ ausdrücken, so müssen wir berücksichtigen, daß nach Formel (37)

$$\bar{U}_1(z|i, z) = U_1(z|i, z) + c_1(i, z) + \int_0^1 c_1(i, \lambda) U_1(z|\lambda, z) d\lambda$$

$$\bar{U}_2(z|i, z) = U_2(z|i, z) + c_2(i, z) + \int_0^1 c_2(i, \lambda) U_2(z|\lambda, z) d\lambda.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in unsere letzte Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{Q}\left(z\left|\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right.\right) &= C\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) + \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) \left[U_1(z|\lambda, z_1) + c_1(\lambda, z_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^1 c_1(\lambda, \mu) U_1(z|\mu, z_1) d\mu \right] \right. \\ &\quad \left. + C\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) \left[U_2(z|\lambda, z_2) + c_2(\lambda, z_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^1 c_2(\lambda, \mu) U_2(z|\mu, z_2) d\mu \right] \right\} d\lambda \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) \left[U_1(z|\lambda, z_1) + c_1(\lambda, z_1) + \int_0^1 c_1(\lambda, \nu) U_1(z|\nu, z_1) d\nu \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[U_2(z|\mu, z_2) + c_2(\mu, z_2) + \int_0^1 c_2(\mu, \pi) U_2(z|\pi, z_2) d\pi \right] d\lambda d\mu \right] \end{aligned}$$

Setzen wir dann

$$\begin{aligned} (56) \quad \bar{C}\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) &= C\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) + \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) c_1(\lambda, z_1) + C\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) c_2(\lambda, z_2) \right\} d\lambda \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) c_1(\lambda, z_1) c_2(\mu, z_2) d\lambda d\mu, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} (57) \quad \bar{Q}\left(z\left|\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right.\right) &= C\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) + \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) U_1(z|\lambda, z_1) + \bar{C}\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) U_2(z|\lambda, z_2) \right\} d\lambda \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) U_1(z|\lambda, z_1) U_2(z|\mu, z_2) d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

$\bar{C}\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)$ ist also der Anfangswert für $z = z_0$ nach dem Umlauf um den Punkt z_0 .

14. Es seien jetzt die beiden Koeffizientenfelder Konstantenfelder $b_1(i, z)$ und $b_2(i, z)$. Das System (35) nimmt dann die Gestalt an

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dz} U_1(z|i, z) &= b_1(i, z) + \int_0^1 U_1(z|i, \lambda) b_1(\lambda, z) d\lambda \\ \frac{d}{dz} U_2(z|i, z) &= b_2(i, z) + \int_0^1 U_2(z|i, \lambda) b_2(\lambda, z) d\lambda \\ \frac{d}{dz} V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) &= U_1(z|i_1, \kappa_1) b_2(i_2, \kappa_2) - U_2(z|i_1, \kappa_2) b_1(i_2, \kappa_1) \\ &\quad - U_1(z|i_2, \kappa_1) b_2(i_1, \kappa_2) + U_2(z|i_2, \kappa_2) b_1(i_1, \kappa_1) \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) b_1(\lambda, \kappa_1) + V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix} \right.\right) b_2(\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \end{aligned} \right.$$

Die für $z = z_0$ verschwindenden Lösungen der beiden ersten dieser Gleichungen sind, wie sich aus den beiden ersten Formeln von (51) sofort ergibt, die sogenannten Volterraschen Transzendenten¹⁾

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} W(z - z_0 | b_1(i, z)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_1^{(n)}(i, z) (z - z_0)^n \\ W(z - z_0 | b_2(i, z)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} b_2^{(n)}(i, z) (z - z_0)^n, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} b_1^{(n)}(i, z) &= \int_0^1 b_1^{(n-1)}(i, \lambda) b_1(\lambda, z) d\lambda \\ b_2^{(n)}(i, z) &= \int_0^1 b_2^{(n-1)}(i, \lambda) b_2(\lambda, z) d\lambda \end{aligned} \right.$$

die sogenannten iterierten Kerne sind.²⁾

Die für $z = z_0$ verschwindende Lösung der dritten Gleichung von (58), die mit $W(z - z_0 | b_1(i, z))$ und $W(z - z_0 | b_2(i, z))$ ein Lösungssystem bildet, ist sonach

1) Vgl. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes, Paris 1913, S. 198.
Schlesinger, a. a. O., S. 113.

2) Vgl. etwa Kowalewski, a. a. O., S. 514.

$$\mathcal{V}\left(\begin{matrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{matrix}\right) = \left[\begin{matrix} W(z - z_0 | b_1(i_1, \kappa_1)) W(z - z_0 | b_2(i_1, \kappa_2)) \\ W(z - z_0 | b_1(i_2, \kappa_1)) W(z - z_0 | b_2(i_2, \kappa_2)) \end{matrix} \right]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n \left(\begin{matrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{matrix} \right) (z - z_0)^n,$$

ch (51) und (59)

$$\chi_n \left(\begin{matrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{matrix} \right) = \left[\begin{matrix} \frac{1}{1!} b_1(i_1, \kappa_1) \frac{1}{(n-1)!} b_2^{(n-1)}(i_2, \kappa_2) + \dots \\ + \frac{1}{(n-1)!} b_1^{(n-1)}(i_1, \kappa_1) \frac{1}{1!} b_2(i_2, \kappa_2) \end{matrix} \right]$$

$$- \left[\begin{matrix} \frac{1}{1!} b_1(i_2, \kappa_1) \frac{1}{(n-1)!} b_2^{(n-1)}(i_1, \kappa_2) + \dots \\ + \frac{1}{(n-1)!} b_1^{(n-1)}(i_2, \kappa_1) \frac{1}{1!} b_2(i_1, \kappa_2) \end{matrix} \right]$$

$$\chi_n \left(\begin{matrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{matrix} \right) = \frac{1}{n!} \left\{ \left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] b_1(i_1, \kappa_1) b_2^{(n-1)}(i_2, \kappa_2) + \dots \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} b_1^{(n-1)}(i_1, \kappa_1) b_2(i_2, \kappa_2) \right]$$

$$- \left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] b_1(i_2, \kappa_1) b_2^{(n-1)}(i_1, \kappa_2) + \dots$$

$$\left. + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} b_1^{(n-1)}(i_2, \kappa_1) b_2(i_1, \kappa_2) \right\}.$$

Das allgemeine Lösungssystem wird nach (43) dargestellt durch die

$$\mathfrak{U}_1(z|i, \kappa) = W(z - z_0 | b_1(i, \kappa)) + c_1(i, \kappa) + \int_0^1 c_1(i, \lambda) W(z - z_0 | b_1(\lambda, \kappa)) d\lambda$$

$$\mathfrak{U}_2(z|i, \kappa) = W(z - z_0 | b_2(i, \kappa)) + c_2(i, \kappa) + \int_0^1 c_2(i, \lambda) W(z - z_0 | b_2(\lambda, \kappa)) d\lambda$$

$$\mathfrak{U}\left(\begin{matrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{matrix}\right) = \frac{\mathfrak{U}_1(z|i_1, \kappa_1) \mathfrak{U}_2(z|i_2, \kappa_2)}{\mathfrak{U}_1(z|i_2, \kappa_1) \mathfrak{U}_2(z|i_1, \kappa_2)}$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \mathfrak{U}\left(\begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{matrix}\right) W(z - z_0 | b_1(\lambda, \kappa_1)) \right.$$

$$\left. + \mathfrak{U}\left(\begin{matrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{matrix}\right) W(z - z_0 | b_2(\lambda, \kappa_2)) \right\} d\lambda$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{U}\left(\begin{matrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{matrix}\right) W(z - z_0 | b_1(\lambda, \kappa_1)) W(z - z_0 | b_2(\mu, \kappa_2)) d\lambda d\mu.$$

Die Streckengleichung (36) erhält die Gestalt

$$(64) \quad \frac{d}{dz} \varrho\left(z \left| \begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix} \right.\right) = \int_0^1 \left\{ \varrho\left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ z_2 \end{smallmatrix} \right.\right) b_1(\lambda, z_1) + \varrho\left(z \left| \begin{smallmatrix} z_1 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right.\right) b_2(\lambda, z_2) \right\} d\lambda,$$

und ihre allgemeine Lösung hat nach (44) die Form

$$(65) \quad \varrho\left(z \left| \begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix} \right.\right) = C\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) + \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) W(z - z_0 \mid b_1(\lambda, z_1)) \right. \\ \left. + C\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) W(z - z_0 \mid b_2(\lambda, z_2)) \right\} d\lambda \\ + \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) W(z - z_0 \mid b_1(\lambda, z_1)) W(z - z_0 \mid b_2(\mu, z_2)) d\lambda d\mu$$

15. Setzen wir in (35)

$$b_1(z \mid i, \kappa) = b_2(z \mid i, \kappa) = b(z \mid i, \kappa),$$

so kommen wir zu dem System

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} U(z \mid i, \kappa) = b(z \mid i, \kappa) + \int_0^1 U(z \mid i, \lambda) b(z \mid \lambda, \kappa) d\lambda \\ \frac{d}{dz} V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, z_1 \\ i_2, z_2 \end{smallmatrix} \right.\right) = U(z \mid i_1, \kappa_1) b(z \mid i_2, \kappa_2) - U(z \mid i_1, \kappa_2) b(z \mid i_2, \kappa_1) \\ \quad - U(z \mid i_2, \kappa_1) b(z \mid i_1, \kappa_2) + U(z \mid i_2, \kappa_2) b(z \mid i_1, \kappa_1) \\ \quad + \int_0^1 \left\{ V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_1, z_2 \end{smallmatrix} \right.\right) b(z \mid \lambda, \kappa_1) \\ \quad + V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, z_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix} \right.\right) b(z \mid \lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \end{array} \right.$$

zurück, dem die Ausdrücke

$$\frac{D_y(z \mid i)}{D_y(z)} \quad \text{und} \quad \frac{D_y\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, i_2 \\ z_1, z_2 \end{smallmatrix} \right.\right)}{D_y(z)}$$

genügen, wenn $y(z \mid i, \kappa)$ eine Lösung der Integrodifferentialgleichung (17) ist.

Das allgemeine Lösungssystem ergibt sich aus (38) und (43) für

$$U_1(z \mid i, \kappa) = U_2(z \mid i, \kappa) = U(z \mid i, \kappa)$$

und

$$c_1(i, \kappa) = c_2(i, \kappa) = c(i, \kappa)$$

in den beiden Formen

$$\left\{ \begin{aligned} U(z|i, \kappa) &= U(z|i, \kappa) + c(i, \kappa) + \int_0^1 c(i, \lambda) U(z|\lambda, \kappa) d\lambda \\ \mathfrak{B}\left(z \begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) &= V\left(z \begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) + C\left(\begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) + c(i_1, \kappa_1) U(z|i_2, \kappa_2) \\ &\quad - c(i_1, \kappa_2) U(z|i_2, \kappa_1) - c(i_2, \kappa_1) U(z|i_1, \kappa_2) \\ &\quad + c(i_2, \kappa_2) U(z|i_1, \kappa_1) \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ C\left(\begin{vmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) U(z|\lambda, \kappa_1) + C\left(\begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{vmatrix}\right) U(z|\lambda, \kappa_2) \right. \\ &\quad \left. + c(i_1, \lambda) [U(z|\lambda, \kappa_1) U(z|i_2, \kappa_2) \right. \\ &\quad \left. - U(z|i_2, \kappa_1) U(z|\lambda, \kappa_2)] \right. \\ &\quad \left. + c(i_2, \lambda) [U(z|i_1, \kappa_1) U(z|\lambda, \kappa_2) \right. \\ &\quad \left. - U(z|\lambda, \kappa_1) U(z|i_1, \kappa_2)] \right\} d\lambda \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{vmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{vmatrix}\right) U(z|\lambda, \kappa_1) U(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} U(z|i, \kappa) &= U(z|i, \kappa) + c(i, \kappa) + \int_0^1 c(i, \lambda) U(z|\lambda, \kappa) d\lambda \\ \mathfrak{B}\left(z \begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) &= \frac{U(z|i_1, \kappa_1) U(z|i_1, \kappa_2)}{U(z|i_2, \kappa_1) U(z|i_2, \kappa_2)} + \mathfrak{G}\left(\begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ \mathfrak{G}\left(\begin{vmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right) U(z|\lambda, \kappa_1) + \mathfrak{G}\left(\begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{vmatrix}\right) U(z|\lambda, \kappa_2) \right\} d\lambda \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{G}\left(\begin{vmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{vmatrix}\right) U(z|\lambda, \kappa_1) U(z|\mu, \kappa_2) d\lambda d\mu. \end{aligned} \right.$$

Form (66) des allgemeinen Lösungssystems von (25) läßt sich etwas vereinfachen. Da nämlich durch (67) jedes Lösungssystem erstellt wird, so läßt sich auch insbesondere das in (66) auftretende

$$U(z|i, \kappa), \quad V\left(z \begin{vmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{vmatrix}\right)$$

in den Formeln (67) durch $U(z|i, \kappa)$ allein ausdrücken. Es wird

$$c(i, \kappa) = 0$$

$$\begin{aligned}
V\left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) &= \left| \begin{smallmatrix} U(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_1) & U(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_2) \\ U(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_1) & U(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_2) \end{smallmatrix} \right| + \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) \\
&+ \int_0^1 \left\{ \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) U(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) + \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) U(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_2) \right. \\
&\left. + \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) U(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) U(\mathcal{Z} | \mu, \kappa_2) d\lambda d\mu \right.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_1) U(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_2) - U(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_1) U(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_2) &= V\left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) - \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) \\
&- \int_0^1 \left\{ \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) U(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) + \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) U(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_2) \right. \\
&\left. - \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) U(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) U(\mathcal{Z} | \mu, \kappa_2) d\lambda d\mu \right.
\end{aligned}$$

Setzen wir diesen Wert für die Determinante in die letzte Gl. von (66) ein, so erhalten wir nach geeigneter Anordnung

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}\left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) &= V\left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) + \left[C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) - \int_0^1 \left\{ c(i_1, \lambda) \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} \lambda, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c(i_2, \lambda) \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ \lambda, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c(i_1, \kappa_1) U(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_2) - c(i_1, \kappa_2) U(\mathcal{Z} | i_2, \kappa_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - c(i_2, \kappa_1) U(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_2) + c(i_2, \kappa_2) U(\mathcal{Z} | i_1, \kappa_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^1 \left\{ \left[C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) - \int_0^1 \left(c(i_1, \mu) \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} \mu, \lambda \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. + c(i_2, \mu) \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ \mu, \kappa_2 \end{smallmatrix}\right) \right) d\mu \right] U(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) - \int_0^1 \left(c(i_1, \mu) \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} \mu, \kappa_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. + c(i_2, \mu) \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ \mu, \lambda \end{smallmatrix}\right) \right) d\mu \right] U(\mathcal{Z} | \lambda, \kappa_1) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c(i_1, \lambda) V\left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} \lambda, \kappa_1 \\ i_2, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) + c(i_2, \lambda) V\left(\mathcal{Z} \left| \begin{smallmatrix} i_1, \kappa_1 \\ \lambda, \kappa_2 \end{smallmatrix} \right.\right) \right\} d\lambda \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^1 \int_0^1 \left[C\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) - \int_0^1 \left\{ c(i_1, \nu) \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} \nu, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) + c(i_2, \nu) \mathfrak{G}\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ \nu, \mu \end{smallmatrix}\right) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. + c(i_1, \nu) U(\mathcal{Z} | \mu, \kappa_1) - c(i_2, \nu) U(\mathcal{Z} | \mu, \kappa_2) \right. \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

Setzen wir also

$$(68) \quad Q\left(\begin{smallmatrix} i_1, x_1 \\ i_2, x_2 \end{smallmatrix}\right) = \int_0^1 \left\{ c(i_1, \lambda) \mathfrak{U}\left(\begin{smallmatrix} \lambda, x_1 \\ i_2, x_2 \end{smallmatrix}\right) + c(i_2, \lambda) \mathfrak{U}\left(\begin{smallmatrix} i_1, x_1 \\ \lambda, x_2 \end{smallmatrix}\right) \right\} d\lambda = C_1\left(\begin{smallmatrix} i_1, x_1 \\ i_2, x_2 \end{smallmatrix}\right),$$

wo $C_1\left(\begin{smallmatrix} i_1, x_1 \\ i_2, x_2 \end{smallmatrix}\right)$ dann auch wieder ein willkürliches Konstantenfeld ist, so erscheint das allgemeine Lösungssystem von (25) in der Form¹⁾

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{U}(z|i, x) &= U(z|i, x) + c(i, x) + \int_0^1 c(i, \lambda) U(z|\lambda, x) d\lambda \\ \mathfrak{B}\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, x_1 \\ i_2, x_2 \end{smallmatrix} \right.\right) &= V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, x_1 \\ i_2, x_2 \end{smallmatrix} \right.\right) + C_1\left(\begin{smallmatrix} i_1, x_1 \\ i_2, x_2 \end{smallmatrix}\right) + c(i_1, x_1) U(z|i_2, x_2) \\ &\quad - c(i_1, x_2) U(z|i_2, x_1) - c(i_2, x_1) U(z|i_1, x_2) \\ &\quad + c(i_2, x_2) U(z|i_1, x_1) \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ C_1\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, x_2 \end{smallmatrix}\right) U(z|\lambda, x_1) + C_1\left(\begin{smallmatrix} i_1, x_1 \\ i_2, \lambda \end{smallmatrix}\right) U(z|\lambda, x_2) \right. \\ &\quad \left. + c(i_1, \lambda) V\left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda, x_1 \\ i_2, x_2 \end{smallmatrix} \right.\right) + c(i_2, \lambda) V\left(z \left| \begin{smallmatrix} i_1, x_1 \\ \lambda, x_2 \end{smallmatrix} \right.\right) \right\} d\lambda \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 C_1\left(\begin{smallmatrix} i_1, \lambda \\ i_2, \mu \end{smallmatrix}\right) U(z|\lambda, x_1) U(z|\mu, x_2) d\lambda d\mu. \end{aligned} \right.$$

Diese Form entspricht der Darstellung der Minoren eines komponierten Feldes durch die Minoren seiner Komponenten in der Gestalt (16).

Die allgemeine Lösung der Streckengleichung

$$(32) \quad \frac{d}{dz} Q\left(z \left| \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right.\right) = \int_0^1 \left\{ Q\left(z \left| \begin{smallmatrix} \lambda \\ x_2 \end{smallmatrix} \right.\right) b(z|\lambda, x_1) + Q\left(z \left| \begin{smallmatrix} x_1 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right.\right) b(z|\lambda, x_2) \right\} d\lambda,$$

die der zweiten Gleichung von (25) entspricht, hat nach Formel (44) die Form

$$(70) \quad Q\left(z \left| \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right.\right) = U\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) + \int_0^1 \left\{ U\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) U(z|\lambda, x_1) + U\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) U(z|\lambda, x_2) \right\} d\lambda \\ + \int_0^1 \int_0^1 C\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) U(z|\lambda, x_1) U(z|\mu, x_2) d\lambda d\mu,$$

1) Den in Nr. 7 erwähnten Bedingungen für die Fredholmschen Determinanten von $U_1(z|i, x)$ und $U_2(z|i, x)$ entsprechend muß hier überall das Nichtverschwinden der Determinante von $U(z|i, x)$ und der Determinante von

wo $U(z|i, \kappa)$ eine den bekannten Bedingungen genügende Lösung der ersten Gleichung von (25) ist.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, am Schlusse meiner Ausführungen Herrn Professor Dr. L. Schlesinger für die Anregung dieser Arbeit sowie für die Unterstützung, die er mir bei der Abfassung hat zuteil werden lassen, meinen besten Dank zu sprechen.

LEBENS LAUF.

Ich, Artur Saßmannshausen, bin geboren am 5. März 1894 zu Worms als Sohn des Großh. Hauptsteueramtskontrolleurs Christian Saßmannshausen und bin evangelischer Konfession. Vom 6. bis zum 9. Lebensjahre wurde ich privat unterrichtet, mit Ausnahme der Zeit von Ostern bis Herbst 1901, in der ich die zweite Klasse der Vorschule zu Worms besuchte. Ostern 1903 trat ich in die Sexta des Großh. Gymnasiums zu Worms ein, dem ich bis zur Ablegung der Reifeprüfung am 7 März 1912 angehörte. Im Sommer-Semester 1912 wurde ich an der Universität Gießen immatrikuliert, an der ich mich bis jetzt dem Studium der Mathematik und Physik gewidmet habe. In dieser Zeit nahm ich an Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Professoren und Dozenten teil: Cermak, Engel, Fromme, Graßmann, Jentzsch, König, Messer, Noack, Schlesinger, Siebeck. Allen diesen Herren bin ich zu großem Danke verpflichtet.